



Teori Pengolahan Sinyal Digital

Erna Kusuma Wati

Teori Pengolahan Sinyal Digital

Erna Kusuma Wati

LP-UNAS

Teori Pengolahan Sinyal Digital

Oleh: Erna Kusuma Wati

Hak Cipta© 2018 pada penulis

Editor : Fitria Hidayanti

Penyunting : Rudi Ristanto

Desain Cover : Rudi Ristanto

Hak Cipta dilindungi Undang-undang.

Dilarang Memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, baik secara elektronik maupun mekanis, termasuk memfotocopy, merekam atau dengan sistem penyimpanan lainnya, tanpa izin dari penulis.

ISBN : 978-623-7376-56-9

Penerbit : LP_UNAS

Jl.Sawo Manila, Pejaten Pasar Minggu, Jakarta Selatan

Telp. 021-78067000 (Hunting) ext.172

Faks. 021-7802718

Email : bee_bers@yahoo.com

ISBN 978-623-7376-56-9



KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT sehingga buku yang berjudul “Teori Pengolahan sinyal Digital” telah selesai disusun. Buku ini disusun agar dapat membantu para mahasiswa untuk lebih memahami penerapan sejarah perkembangan pengolahan sinyal beserta teori matematika.

Penulis pun menyadari jika didalam penyusunan buku ini mempunyai banyak sekali kekurangan, namun penulis meyakini sepenuhnya bahwa sekecil apapun buku ini tetap akan memberikan sebuah manfaat bagi pembaca.

Jakarta, 20 September 2018.

Penulis
Erna kusuma Wati

DAFTAR ISI

Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	iv
Bab 1. Pendahuluan.....	1
1. 1 Analisis Runtun & Waktu.....	1
1. 2 Sejarah Perkembangan Pengolahan Sinyal	2
1. 3 Ruang Lingkup ARW	5
Bab 2. Output Sistem Fisis.....	11
2. 1 Pengertian Sistem.....	11
2. 2 Karakter Sistem.....	15
2. 3 Klasifikasi Sistem	19
2. 4 Fungsi Impuls.....	21
2. 5 Hubungan Input Output	22
Bab 3. Konvolusi dan Korelasi	28
3. 1 Integral Konvolusi.....	28
3. 2 Intergral Korelasi	42
Bab 4. Transformasi Fouries	54
4. 1 Trasnformasi Fourier & gerak harmonik	54
4. 2 jenis-Jenis Fungsi Waktu	56
4. 3 Deret Fourier	57

4. 4 Intergal fourier	78
4. 5 Alternatif Transformasi Fourier	89
Bab 5. Teori Filter	91
5. 1 Dasar-dasar Teori Filter	91
5. 2 Filter Penghilang Ghost	94
5. 3 Filter Penghilang Reverbrasi.....	100
5. 4 Filter Frekuensi	105
Bab 6. Transformasi Z	115
6. 1 Pengertian Transformasi Z	115
6. 2 Transformasi Z dan Konvolusi	115
6. 3 Transformasi Laplace	125
6. 4 Tranfromasi Laplace & Filter	123
6. 5 Parancangan Filter dengan metode Grafif	131
6. 6 Filter Invers	141
Daftar Pustaka	144
Tentang Penulis	149

BAB 1

PENDAHULUAN

1. 1. Arti istilah analisis runtun waktu

Analisis runtun waktu diterjemahkan dari bahasa Inggris: *time series analysis*, yang berarti menyangkut deret waktu. Yang dimaksud dengan deret waktu adalah deretan nilai-nilai (harga atau angka) yang berjajar pada sumbu waktu dan dipisahkan oleh interval waktu tertentu. Interval waktu ini dikenal sebagai interval cuplik atau waktu cuplik (*sampling interval* atau *sampling time*) T_s . Banyak deret angka perdetik, yaitu $f_s = 1/T_s$ dikenal sebagai laju cuplik atau frekuensi cuplik (*sampling rate* atau *sampling frequency*).

Contoh deret waktu yang paling menonjol adalah sinyal digital. Pada umumnya secara alami sinyal merupakan fungsi waktu analog. Penggunaan computer digital yang tak dapat dihindari dalam proses pengolahan data menyebabkan data atau sinyal harus berbentuk digital. Sinyal analog dapat didigitalkan dengan menggunakan *analog to digital converter* (ADC). Pada saat ini rekaman data umumnya sudah dalam bentuk digital.

Data atau sinyal biasanya mengandung derau atau gangguan (noise). Gangguan ini dapat berupa gangguan yang diketahui bentuknya dan ada pula yang bersifat rawak (*random*). Untuk mendapatkan informasi yang sebanyak-banyaknya dari suatu data/sinyal, data/sinyal tersebut harus dianalisis dan diproses dengan computer (data/sinyal harus didigitalkan dulu). Oleh karena itu Analisis Runtun Waktu dapat mempunyai istilah lain yaitu Analisis Sinyal Digital atau Pemrosesan Sinyal Digital (*digital signal analysis atau digital signal processing* atau *digital data processing*).

1. 2. Sejarah perkembangan pengolahan sinyal

Pengolahan sinyal semula dipergunakan di lapangan komunikasi, yaitu di bidang teori komunikasi. Aplikasinya kemudian berkembang sangat pesat untuk pengolahan data yang berasal dari eksplorasi seismik yang biasa dipergunakan untuk mencari minyak bumi (Pada tahun 70-an, salah satu matakuliah pokok pada Program Studi Geofisika adalah Teori Komunikasi).

Kenapa pengolahan sinyal berkembang di dunia komunikasi? Komunikasi adalah perpindahan informasi dari satu tempat ke tempat yang lain. Sistem komunikasi terdiri dari 3 unsur pokok, yakni Pengirim, Saluran dan Penerima.

Hal yang tak diinginkan tetapi selalu menyertai sistem komunikasi adalah noise yang masuk pada saluran. Sistem Komunikasi dikatakan baik apabila laju informasinya besar di samping informasinya selamat. Usaha-usaha yang dapat dilakukan untuk memperbaiki sistem komunikasi terutama supaya informasinya selamat., yaitu:

1. Yang menyangkut pengiriman yaitu: membedakan pesan-pesan dengan jelas satu sama lain, memperlambat laju pesan, memperkecil jumlah pesan, dan mengkodekan pesan-pesan
2. Yang menyangkut saluran yaitu: memperbesar *signal to noise ratio*, memindah saluran (*frequency modulation*), menjadwalkan alokasi saluran (*time multiplexing*), dan tidak melampaui kapasitas saluran.
3. Yang menyangkut penerimaan yaitu meningkatkan kemampuan atau kepandaian penerima.
Kemampuan/kepandaian yang harus ditingkatkan adalah:
 - a. Daya Korelasi, yakni kemampuan untuk menghubungkan hal-hal yang mungkin berkaitan satu sama lain.

- b. Daya pisah/filter, yakni kemampuan untuk memisahkan hal-hal yang penting dan tidak penting, yang perlu dan tidak perlu dan sebagainya.
- c. Daya ingat atau memori, yakni kemampuan untuk mengingat pesan/informasi yang telah diterima.
- d. Daya analisis, yakni kemampuan untuk menganalisis masalah dengan menggunakan ilmu-ilmu lain seperti fisika, matematika, dan lain-lainnya untuk memecahkan masalah tersebut.

Usaha-usaha yang menyangkut penerimaan itulah yang kemudian berkembang dengan pesat dalam teori komunikasi. Pertama sekali yang berkembang pesat adalah yang berkaitan dengan daya pisah yaitu teori filter. Sebelum computer digital berkembang seperti yang sekarang ini, untuk kepentingan komunikasi ini telah dikembangkan filter-filter analog yang secara fisis mempunyai wujud (hardware). Kesukaran akan dihadapi untuk mewujudkan filter yang cukup kompleks. Bahkan perkembangan computer analog pun tidak banyak membantu untuk mengatasi persoalan tersebut. Persoalan ini akhirnya dapat diatasi sejalan dengan perkembangan penggunaan computer

digital seperti yang sekarang ini. Dengan perkembangan computer digital ini, disamping daya pisah, daya lain yaitu daya korelasi, daya ingat (memori), dan daya analisis sistem penerima dalam komunikasi juga dapat ditingkatkan dengan cepat. Sistem komunikasi pada saat ini telah berkembang luar biasa cepat yang kesemuanya serba digital.

1. 3. Ruang lingkup analisis runtun waktu

Mempelajari Analisis Runtun Waktu dimulai dengan mengenal pengertian kata “sistem” terutama yang berkaitan dengan “sistem fisis”, yang dibatasi pada sistem-sistem yang linier, menentu, tak atisipatif, dan tak berubah waktu. Yang mendasari Analisis Runtun Waktu adalah hubungan antara masukan (input) dan keluaran (output) dengan sistem itu sendiri yang biasanya diwakili oleh tanggapan impulsnya yang merupakan fungsi waktu. Bila tanggapan impuls ini selain fungsi waktu juga merupakan fungsi tempat biasanya dikenal sebagai Fungsi Green. Hubungan tersebut di atas adalah $\text{output} = \text{input}$ dikonvolusikan dengan tanggapan impuls (integral konvolusi antara input dan tanggapan impuls), yang secara matematis dituliskan sebagai:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda \quad (1.1)$$

dengan $y(t)$ adalah output, $x(t)$ adalah input dan $h(t)$ adalah tanggapan impuls sistem. Ini adalah hubungan input-output suatu sistem dalam kawasan waktu (*time domain*).

Dalam bidang fisika dan teknik, hubungan input-output suatu sistem dapat pula dinyatakan dalam kawasan frekuensi kompleks ($s = j\omega = j2\pi f$), yaitu:

$$Y(s) = X(s) \times H(s) \quad (1.2)$$

dengan $Y(s)$, $X(s)$, dan $H(s)$ adalah transformasi Laplace dari $y(t)$, $x(t)$ dan $h(t)$.

Sedang dalam bidang komunikasi dan pengolahan data, hubungan input-output biasanya dapat dinyatakan dalam kawasan frekuensi f . Hubungan tersebut adalah :

$$Y(f) = X(f) \times H(f) \quad (1.3)$$

dengan $Y(f)$, $X(f)$, dan $H(f)$ adalah transformasi Fourier dari $y(t)$, $x(t)$ dan $h(t)$. Jadi pada dasarnya transformasi Fourier adalah setara dengan transformasi Laplace.

Dalam ilmu fisika dan tehnik, $H(s)$ dan/atau $H(f)$ dikenal sebagai fungsi pindah (*transfer function*). Fungsi

pindah H dalam kawasan frekwensi f lebih mudah dipahami dari pada dalam kawasan frekwensi kompleks s , sehingga pada saat ini penggunaan $H(f)$ (transformasi Fourier) lebih dominan dari pada $H(s)$ (transformasi Laplace). Dengan demikian transformasi Fourier akan memegang peran yang sangat penting dalam Analisis Runtun Waktu.

Analisis Runtun waktu menyangkut sinyal digital, sehingga transformasi Fourier digital perlu dipelajari secara khusus. Kebetulan dalam komputasi matematik telah dikembangkan algoritma untuk menyelesaikan transformasi Fourier digital yang sangat berguna yaitu Transformasi Fourier Cepat (*Fast Fourier Transform* atau FFT). Dengan menggunakan FFT ini, hubungan input-output sistem akan dapat diselesaikan oleh komputer jauh lebih cepat dari pada waktu yang diperlukan komputer untuk menyelesaikan problem yang sama, tapi dalam kawasan waktu (integral konvolusi). Oleh karena itu penggunaan FFT menjadi sangat biasa dalam Analisis Runtun Waktu atau pengolahan sinyal digital.

Ada transformasi matematik sederhana yang mirip dan setara dengan transformasi Fourier digital yang dikenal

sebagai Transformasi z . Dalam kawasan z ini hubungan input-output adalah:

$$Y(z) = X(z) \times H(z) \quad (1.4)$$

dengan $Y(z)$, $X(z)$, dan $H(z)$ adalah output, input, dan tanggapan impuls sistem dalam kawasan z . Walaupun tidak seberdaya guna FFT, transformasi z ini akan banyak dipakai dalam perancangan filter rekursif, terutama yang menyangkut filter frekuensi (misalnya filter Butterworth dan Chebysev) dan filter inversi.

Karena ARW setara dengan pengolahan sinyal digital, maka yang terpenting dari semua itu ARW akan mempelajari cara-cara memperoleh informasi yang sebanyak-banyaknya dari suatu sinyal (digital atau yang didigitalkan). Sebagai contoh sinyal adalah data seismik yang diperoleh dari eksplorasi minyak bumi dengan metoda seismik. Sinyal seismik tersebut, di samping mengandung sinyal-sinyal gelombang pantul (berisi informasi posisi dan sifat bidang pantul), juga mengandung gangguan. Gangguan ini mungkin bersifat rawak atau random (karena angin, pohon, dsb) maupun bersifat tetap seperti ghost oleh pantulan permukaan, reverberasi atau gaung oleh lapisan air

laut atau lapisan batuan, efek gelembung (buble) pada sumber di dalam air dsb. Untuk menghilangkan gangguan-gangguan tersebut diperlukan tapis atau filter. Yang dimaksud dengan filter tidak perlu mempunyai wujud fisis, karena yang diperlukan dalam komputasinya (dengan komputer) adalah tanggapan impuls filter tersebut. Tanggapan impuls inilah yang harus dicari dan dianalisis dengan menggunakan latar belakang fisika dan matematika yang berkaitan dengan gangguan dan transformasi-transformasi tersebut di atas yang pas dengan permasalahannya.

Dalam perancangan filter-filter digital tersebut sering diperlukan/dipergunakan suatu operasi matematik yang dikenal sebagai integral korelasi atau sering disebut sebagai ‘korelasi’ saja. Integral korelasi ini menyatakan seberapa besar kerelasi antara 2 buah fungsi sebagai fungsi pergeseran. Integral korelasi antara 2 fungsi waktu $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah:

$$\varphi_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda+t) d\lambda \quad (1.5)$$

Korelasi ada 2 jenis, yaitu kroskorelasi (2 fungsi berbeda) dan otokorelasi (2 fungsi yang sama). Dua fungsi dengan

durasi terbatas yang sama tentu akan mempunyai korelasi yang besar kalau keduanya berimpit (pergeseran = 0) dan tidak berkorelasi sama sekali (korelasi = 0) bila salah satunya digeser cukup jauh. Sementara itu otokorelasi sinyal periodik akan mempunyai nilai yang periodik juga, karena setiap pergeseran sebesar satu periode nilai otokorelasinya akan sama dan berulang. Mengingat bentuk integral korelasi mirip dengan integral konvolusi, maka integral korelasi selalu dipelajari bersama dengan integral konvolusi.

BAB 2

OUTPUT SISTEM FISIS

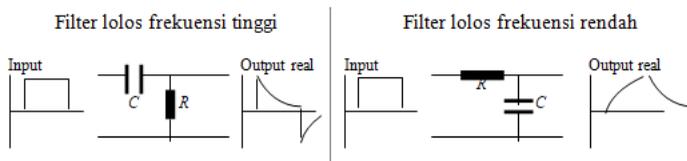
2. 1. Pengertian sistem

Secara umum sistem didefinisikan sebagai gabungan atau kombinasi unsur-unsur yang tersusun secara tertentu sehingga suatu input atau gangguan akan menyebabkan tanggapan (response) atau output yang karakteristik. Sistem dapat berupa sistem social, ekonomi, masyarakat dan sebagainya. Dalam sistem masyarakat misalnya, unsur-unsur sistemnya dapat berupa suku-suku (etnik), kelompok-kelompok agama, dan sebagainya. Sistem masyarakat dengan suku dan agama yang beragam tentu berbeda dengan sistem masyarakat dengan satu suku dan satu agama. Suatu gangguan yang sama pada kedua sistem masyarakat ini tentu akan menghasilkan respon yang berbeda, sesuai dengan karakternya (karakteristik). Unsur-unsur sistem masyarakat tentu akan jauh lebih banyak dari sekedar 2 unsur tersebut.

Khusus disini, yang menarik tentu bukan sistem-sistem social dan ekonomi, melainkan sistem dalam bidang fisika atau teknik, yaitu sistem fisis. Unsur-unsur penyusun

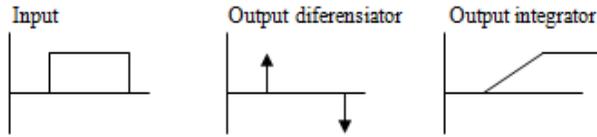
sistem fisis dapat berwujud seperti kapasitor, resistor, koil, massa, pegas, dan sebagainya dan dapat secara fisis tidak berwujud, misalnya entropi, saluran, indeks unjuk kerja, dan sebagainya. Contoh sederhana sistem adalah filter lolos frekuensi tinggi dan

filter lolos frekuensi rendah. Keduanya adalah sistem elektronika yang unsur-unsurnya adalah sama yaitu resistor dan kapasitor, tetapi susunannya yang berbeda (gambar 2.1). Karena susunannya berbeda input yang sama (misal fungsi kotak) akan menghasilkan output yang berbeda.



Gambar 2.1 Filter lolos frekuensi tinggi dan filter lolos frekuensi rendah beserta outputnya bila ada input berbentuk fungsi kotak.

Filter lolos frekuensi tinggi dapat dipakai sebagai diferensiator, bila harga RC nya kecil. Sedang filter lolos frekuensi rendah dapat dipakai sebagai integrator bila harga RC nya besar. Idealnya bila ada input berupa fungsi kotak diferensiator dan integrator akan mempunyai output seperti yang terlihat pada gambar 2.2.



Gambar 2.2 Out put diferensiator dan integrator bila ada input berupa fungsi kotak

Apabila pada rangkaian R dan C yang dipasang seri, dialiri arus $i(t)$, maka pada ujung-ujung resistor dan kapasitor akan timbul tegangan $v_R(t)$ dan $v_C(t)$, sehingga

berlaku: $i(t) = \frac{1}{R} v_R(t)$ dan $i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$. Dengan

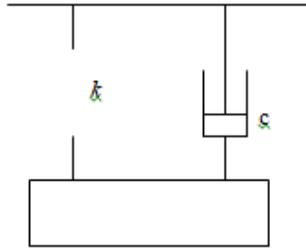
demikian dapat dituliskan relasi:

$$v_R(t) = \frac{1}{RC} \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (2.1)$$

Ini adalah persamaan diferensial orde satu, yang dapat dipakai untuk menghitung output yang terukur pada ujung-ujung resistor maupun kapasitor. Oleh karena itu sistem fisis yang unsur-unsurnya adalah R dan C yang dipasang seri dapat digolongkan sebagai sistem orde satu.

Untuk lebih jelasnya, berikut ini akan diberikan contoh lain, yaitu sistem mekanik yang unsur-unsurnya

adalah beban yang digantung dengan pegas dan peredam seperti yang terlihat pada gambar 2.3.



Gambar 2.3 Sistem mekanik dengan Beban yang digantung dengan pegas dan peredam

Pada keadaan ini, apabila beban menyimpang sejauh x dari keadaan setimbang akan berlaku hubungan:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2.2)$$

dengan m adalah massa beban, c adalah konstanta redaman, dan k adalah konstanta pegas. Persamaan (2.2) adalah persamaan yang menyatakan output sistem x yang merupakan persamaan diferensial orde dua. Oleh karena itu sistem beban, pegas, dan peredam dapat digolongkan sebagai sistem orde dua.

2.2. Karakter sistem, tanggapan impuls, dan tanggapan undak.

Karakter suatu sistem dapat dicari dari susunan unsur-unsur yang ada di dalam sistem tersebut. Untuk menentukan karakter sistem yang unsur-unsur penyusunnya sederhana secara analitis matematis tidaklah sukar. Tetapi untuk sistem yang unsur-unsur penyusunnya banyak dan kompleks tentu akan sangat sulit.

Cara yang lebih mudah untuk menentukan karakter suatu sistem adalah dari hubungan input-outputnya. Di depan dinyatakan bahwa setiap input yang bekerja pada suatu sistem akan menghasilkan output yang karakteristik. Ini berarti setiap pasangan input-output dapat dipakai untuk mengungkap karakter suatu sistem. Namun demikian, orang tentu akan memilih hubungan input-output yang sederhana dan yang aplikasinya dapat digeneralisir. Hubungan input-output yang umumnya dipakai adalah bila inputnya berupa fungsi impuls (impulse function) dan fungsi undak (step function atau heavy side function), sehingga outputnya dapat dikatakan sebagai tanggapan impuls dan tanggapan undak. Jadi tanggapan impuls adalah output suatu sistem bila inputnya berupa impuls. Sedang tanggapan undak adalah

output suatu sistem bila inputnya adalah fungsi undak. Karena inputnya yang sudah jelas terdefinisi yaitu fungsi impuls atau fungsi undak, maka yang dipakai untuk mewakili karakter sistem pada umumnya adalah tanggapan impulsnya atau tanggapan undaknya.

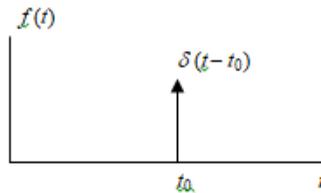
Fungsi impuls adalah fungsi yang nilainya ada hanya pada waktu sesaat yang sangat pendek. Kalau itu adalah energi maka energi tersebut dilepas pada waktu yang sangat singkat, misalnya energi yang dilepas oleh ledakan (explosion), pukulan (impact), benda jatuh, dan sebagainya. Sedang fungsi undak adalah fungsi yang pada suatu saat nilainya mendadak meloncat kesuatu harga dan kemudian konstant, misalnya tegangan yang semula dihubungkan dengan tanah kemudian diputus dan dihubungkan ke aki dengan suatu switch.

Fungsi impuls dan fungsi undak dapat mempunyai harga atau magnitudo yang berbeda-beda, maka yang dimaksud dengan fungsi impuls dan fungsi undak adalah fungsi impuls satuan (*unit impulse function*) dan fungsi undak satuan (*unit step function*).

Fungsi impuls satuan biasanya dikenal sebagai fungsi delta atau fungsi direct, yang secara matematis disimbulkan dengan:

$$f(t) = \delta(t-t_0) \quad (2.4)$$

Fungsi ini berharga 0 kecuali pada saat $t = t_0$ yang harganya mendekati tak berhingga, sehingga dinyatakan dengan anak panah (gambar 2.4)



Gambar 2.4 Fungsi impuls atau fungsi delta atau fungsi direct
Sifat khas dan pokok fungsi impuls satuan dapat dilihat pada harga integralnya

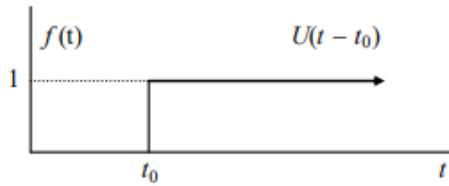
$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0) dt = 1, \text{ untuk } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (2.6)$$

Nilai integralnya sama dengan 1, sesuai dengan namanya: fungsi impuls satuan.

Fungsi undak satuan (unit step function) secara matematis biasanya disimbulkan dengan $f(t) = U(t - t_0)$. Fungsi ini mempunyai harga 0 untuk $t < t_0$ dan berharga 1 untuk $t \geq t_0$, sesuai dengan namanya: fungsi undak satuan (gambar 2.5).



Gambar 2. 5 Fungsi undak satuan

Karena harganya yang tidak seimbang (terhadap $t = t_0$), fungsi undak biasanya juga disebut sebagai fungsi berat sebelah (*heavy-side function*). Kalau sifat pokok fungsi impuls satuan terletak pada harga integralnya, maka pada fungsi undak satuan terletak pada harga diferensialnya (turunannya), yaitu:

$$\frac{dU(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0) \quad (2.7)$$

Jadi turunan fungsi undak satuan adalah fungsi impuls satuan.

2. 3. Klasifikasi sistem

Berdasar sifat-sifatnya sistem fisis dapat diklasifikasikan menjadi:

- a. Sistem menentu (*deterministic system*), yaitu bila untuk setiap input $x(t)$ ada suatu output $y(t)$ yang unik (tertentu), tidak boleh tidak. Sebagai lawannya tentu ada sistem tidak menentu (*nondeterministic system*). Sistem tak menentu masih menarik bila outputnya mempunyai sifat statistis tertentu, yang berarti mempunyai kebolehjadian yang tertentu. Sistem seperti ini dikenal sebagai *probabilistic system*.
- b. Sistem takantisipatif (*nonanticipative system*), yaitu bila output sekarang tidak bergantung pada input yang akan datang. Jadi output pada saat t_0 , $y(t_0)$ sepenuhnya hanya ditentukan oleh input $x(t)$ untuk $t \leq t_0$. Ini merupakan hubungan sebab akibat yang normal. Sebagai lawannya tentu ada sistem antisipatif, yang berarti sistem sudah mempunyai output sebelum ada input (hubungan sebab

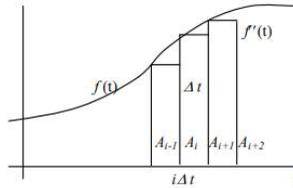
akibat yang tidak normal). Sistem antisipatif mempunyai output yang bersifat prediksi atau ramalan.

- c. Sistem terealisasi (*realizable system*), yaitu bila ada input $x(t)$ yang real akan ada output $y(t)$ yang juga real. Lawannya yaitu sistem yang tak terealisasi sulit dijelaskan dan dicarikan contohnya.
- d. Sistem linear, yaitu bila input $x_1(t)$ memberikan output $y_1(t)$, input $x_2(t)$ memberikan output $y_2(t)$, input $x_3(t)$ memberikan output $y_3(t)$, maka input $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t)$ akan memberikan output $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t)$, dengan c_1 , c_2 , & c_3 adalah constant. Hal ini sesuai dengan prinsip superposisi. Untuk sistem nonlinear, prinsip superposisi ini tidak berlaku.
- e. Sistem tak berubah waktu (*time invariant system*), yaitu bila hubungan antara input dan output tidak bergayut atau bergantung pada waktu. Bila input $x(t)$ memberikan output $y(t)$, maka input $x(t-\delta)$ akan memberikan output $y(t-\delta)$.

2. 4. Menyatakan suatu fungsi dengan jumlahan fungsi-fungsi impuls

Suatu fungsi sebarang $f(t)$ dapat dinyatakan dengan jumlahan fungsi-fungsi impuls. Untuk mendapatkan fungsi-

fungsi impuls tersebut, pertama fungsi $f(t)$ tersebut didekati dengan fungsi lain $f'(t)$ yang tersusun atas luasan segmen-segmen di bawah $f(t)$ seperti pada gambar 2.6



Gambar 2.6. Fungsi $f(t)$ yang didekati dengan fungsi diskrit $f'(t)$

Segmen-segmen tersebut mempunyai lebar yang sama, yaitu Δt dan masing-masing luasnya adalah $A_{i-2}, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, \dots$ dst, sehingga fungsi pendekatan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$f'(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \quad (2.8)$$

Karena tinggi segmen yang ke i adalah $f(i \Delta t)$, maka luas segmen ke i adalah $A_i = f(i \Delta t) \Delta t$, sehingga dapat ditulis menjadi:

$$f'(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i \Delta t) \Delta t \quad (2.9)$$

Bila luas segmen-segmen tersebut ditimbun atau dikumpulkan pada saat-saat diskrit, yaitu kelipatan bulat dari Δt yang sesuai dengan posisi segmen pada sumbu waktu, maka luas segmen-segmen tersebut dapat diganti dengan fungsi-fungsi impuls dengan luas-luas yang sama. Untuk segmen yang ke i , luasnya $A_i = f(i \Delta t) \Delta t$, ditimbun pada saat $i \Delta t$, maka fungsi impuls yang mewakilinya adalah $\delta(t - i \Delta t)$. Persamaan diatas menjadi:

$$f'(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i \Delta t) \delta(t - i \Delta t) \Delta t \quad (2.10)$$

Pendekatan ini akan sempurna ($f' = f$) apabila $\Delta t \rightarrow 0$, yang berarti tanda Σ menjadi tanda integral \int , $i \Delta t$ menjadi t , dan Δt menjadi dt , sehingga persamaan menjadi:

$$f'(t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda \quad (2.11)$$

Persamaan diatas memperlihatkan bahwa setiap fungsi $f(t)$ dapat diuraikan atas fungsi-fungsi impuls.

2. 5. Hubungan input-output suatu sistem

Bila pada sistem yang menentu dan tak antisipatif dikenakan input berupa impuls satuan $\delta(t)$, maka outputnya adalah tanggapan impuls sistem tsb yaitu $h(t)$:

$$\text{Input } \delta(t) \Rightarrow \text{Output } h(t) \quad (2.12)$$

Kalau sistem tersebut juga tak berubah waktu (time invariant), maka

$$\text{Input } \delta(t - \lambda) \Rightarrow \text{Output } h(t - \lambda) \quad (2.13)$$

Selanjutnya kalau sistem tersebut juga linear (berlaku prinsip superposisi), maka:

$$\text{Input } C_0 \delta(t - \lambda_0) + C_1 \delta(t - \lambda_1) \Rightarrow \text{Output } C_0 h(t - \lambda_0) + C_1 h(t - \lambda_1) \quad (2.14)$$

Sekarang kalau inputnya adalah sembarang, sesuai dengan persamaan diatas akan berlaku:

$$\text{Input } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda \Rightarrow \text{Output } \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \quad (2.15)$$

Jadi untuk sistem yang menentu, tak-antisipatif, tak berubah waktu, dan linier hubungan antara input $x(t)$, tanggapan impuls $h(t)$, dan output $y(t)$ adalah:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \quad (2.16)$$

Bentuk integral pada pers. ini dikenal sebagai integral konvolusi (atau konvolusi) antara 2 buah fungsi $x(t)$ dan $h(t)$. Dalam integral konvolusi ini posisi kedua fungsi dapat dipertukarkan, sehingga akan berlaku:

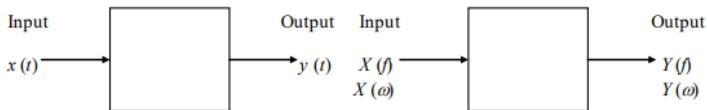
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t-\lambda) d\lambda \quad (2.17)$$

Biasanya integral konvolusi antara fungsi $x(t)$ dan $h(t)$ disimbulkan dengan tanda bintang (asteris) diantaranya:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (2.18)$$

Karena sifat yang khas tanggapan impuls ini, yang mana hubungannya dengan input dan output suatu sistem dapat digeneralisasikan melalui integral konvolusi, maka untuk menyatakan suatu sistem dalam kawasan waktu biasanya diwakili oleh tanggapan impulsnya $h(t)$. Dalam kawasan frekuensi diwakili oleh fungsi pindahnya $H(f)$ atau $H(\omega)$.

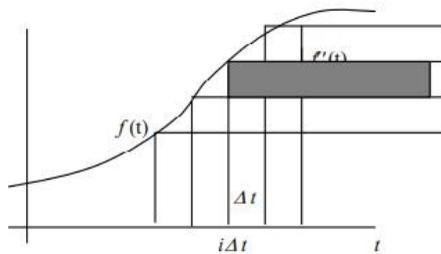
Gambar (2.7) melukiskan diagram kotak suatu sistem baik dalam kawasan waktu maupun frekuensi.



Gambar 2.7 Cara menggambarkan sistem dalam kawasan waktu t dan frekuensi f (ω). Disini h adalah tanggapan impuls sistem dan H adalah fungsi pindah sistem.

2. 6 Menyatakan suatu fungsi dengan jumlahan fungsi-fungsi undak

Suatu fungsi sebarang juga dapat dinyatakan dengan jumlahan fungsi-fungsi undak. Pertama fungsi tersebut didekati dengan $f'(t)$ yang berupa jumlahan segmen-segmen horizontal seperti yang terlihat pada gambar 2.8.



Gambar 2.8. Fungsi $f(t)$ didekati dengan jumlahan segmen-segmen horizontal.. Segmen yang ke i (dihitamkan) dimulai pada saat $t = i\Delta t$

Untuk lebih jelasnya, pada gambar ini segmen horizontal yang ke i dihitamkan. Segmen ini di sebelah kiri dimulai dari saat $t = i\Delta t$. Segmen tersebut dibatasi oleh 2 fungsi undak yang dimulai pada saat $t = (i-1)\Delta t$ dan pada saat $t = i\Delta t$, sehingga segmen yang ke i tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$f'_i = f(i\Delta t) U(t - i\Delta t) - f([i-1]\Delta t) U(t - [i-1]\Delta t) \quad (2.19)$$

dapat disederhanakan bentuknya menjadi:

$$f'_i = \{f(i\Delta t) - f([i-1]\Delta t)\} U(t - i\Delta t) \quad (2.20)$$

Jadi $f(t)$ dapat didekati dengan $f'(t)$ yang berupa jumlahan persamaan :

$$f'_i = \sum_{i=-\infty}^{i\Delta t} \{f(i\Delta t) - f([i-1]\Delta t)\} U(t - i\Delta t) \quad (2.21)$$

Pendekatan ini akan menjadi sempurna bila operasi jumlahan diganti dengan operasi integral . Untuk itu tanda $\Sigma \rightarrow$ tanda \int , $\Delta t \rightarrow dt$, $i\Delta t \rightarrow t$, dan:

$$f(i\Delta t) - f([i-1]\Delta t) \rightarrow \frac{d}{dt} f(t) dt \quad (2.22)$$

sehingga akhirnya diperoleh:

$$f(t) = f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\lambda)}{d\lambda} U(t-\lambda) d\lambda \quad (2.23)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa sebarang fungsi dapat dinyatakan dengan jumlahan (integral) fungsi-fungsi undak.

2. 7. Hubungan antara input, output, dan tanggapan undak

Bila pada sistem yang menentu dan tak antisipatif dikenakan input berupa fungsi undak satuan $U(t)$, maka

outputnya adalah tanggapan undak sistem tersebut yaitu $r(t)$:

$$\text{Input } U(t) \Rightarrow \text{Output } r(t) \quad (2.24)$$

Kalau sistem tersebut juga tak berubah waktu (time invariant), maka

$$\text{Input } U(t - \lambda) \Rightarrow \text{Output } r(t - \lambda) \quad (2.25)$$

Sekarang kalau inputnya adalah sebarang, akan berlaku:

$$\text{Input } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\lambda)}{d\lambda} U(t-\lambda) d\lambda \Rightarrow \text{Output } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda) d\lambda \quad (2.27)$$

Jadi untuk sistem yang menentu, tak-antisipatif, tak berubah waktu, dan linier hubungan antara input $x(t)$, tanggapan impuls $h(t)$, dan output $y(t)$ adalah:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(\lambda)}{d\lambda} r(t-\lambda) d\lambda \quad (2.28)$$

Jadi output suatu sistem merupakan integral konvolusi antara tanggapan undak sistem dengan turunan pertama input terhadap waktu.

BAB 3 KONVOLUSI DAN KORELASI

3. 1. Integral Konvolusi

3. 1. 1. Definisi

Integral konvolusi antara 2 fungsi $x(t)$ dan $h(t)$ didefinisikan sebagai:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda \quad (3.1)$$

yang umumnya dinotasikan sebagai:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3.2)$$

Kalau diadakan substitusi $\tau = t - \lambda$, sehingga $\lambda = t - \tau$, dan $d\lambda = -d\tau$; sedangkan batas- batas integral untuk $\lambda = \infty$, $\tau = -\infty$ dan untuk $\lambda = -\infty$, $\tau = \infty$. Dengan demikian persamaan (3.1) dapat dituliskan menjadi:

$$y(t) = - \int_{\infty}^{-\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (3.3)$$

Jadi dalam integral konvolusi kedua fungsi dapat dipertukarkan tempatnya:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (3.4)$$

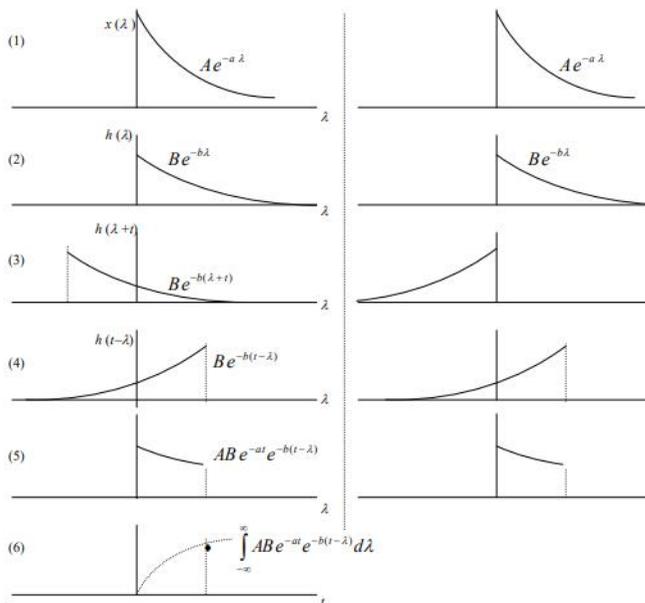
Bentuk integral konvolusi persamaan tampak cukup sederhana, namun penyelesaiannya secara analitis cukup rumit. Berikut ini akan dijelaskan bagaimana cara menyelesaikan konvolusi antara 2 fungsi, misalnya $x(t) = Ae^{-at}$ dan $h(t) = Be^{-bt}$. Urut-urutan yang harus dikerjakan (gambar 3.1 sebelah kiri) adalah:

1. Ubah $x(t)$ dan $h(t)$ menjadi $x(\lambda)$ dan $h(\lambda)$ (gambar 3.1 kiri no. 1 dan 2).
2. Geser $h(\lambda)$ sejauh $+t$ (maju/kekiri) menjadi $h(\lambda+t)$ (gambar 3.1 kiri no 3).
3. Lipat $h(\lambda+t)$ menjadi $h(t-\lambda)$ (gambar 3.1 kiri no 4).
4. Kalikan $x(\lambda)$ dengan $h(t-\lambda)$. Hasilkalinya adalah gambar 3.1 kiri no 5.
5. Integalkan $x(\lambda)h(t-\lambda)$ sepanjang sumbu λ , hasilnya suatu nilai (disimbulkan dengan tanda * pada gambar 3.1 kiri no 6). Nilai ini besarnya tergantung pada besar pergeseran t (merupakan fungsi t) yang digambar dengan garis lengkung

putus-putus (deretan tanda-tanda *). Inilah hasil integral konvolusinya.

Ada cara lain yang lebih mudah untuk mengerjakan integral konvolusi antara 2 buah fungsi, walaupun secara matematis langkahnya tidak benar, tapi hasil akhirnya sama. Gambar 3.1 sebelah kanan menjelaskan urutan kerja yang harus dilakukan dengan cara yang lebih sederhana tersebut, yaitu:

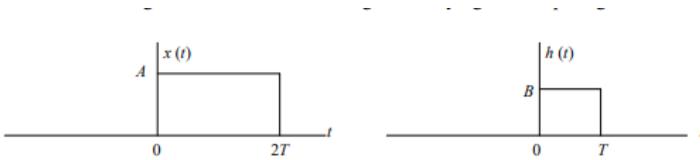
1. Ubah $x(t)$ dan $h(t)$ menjadi $x(\lambda)$ dan $h(\lambda)$ (gambar 3.1 kanan no. 1 dan 2).
2. Lipat $h(\lambda)$ menjadi $h(-\lambda)$ (gambar 3.1 kanan no 3)
3. Geser $h(-\lambda)$ mundur/kekanan sejauh t (ini secara matematik salah karena pergeseran $+t$, mestinya harus maju/kekiri). Hasilnya adalah $h(t-\lambda)$, sama dengan cara yang benar).
4. Selanjutnya urutan langkahnya sama dengan cara yang terdahulu.



Gambar 3.1. Urutan cara menyelesaikan konvolusi antara 2 fungsi. Gambar kiri adalah urutan yang secara matematik benar. Gambar kanan, walaupun secara matematik tidak benar, tapi lebih mudah dan hasilnya benar.

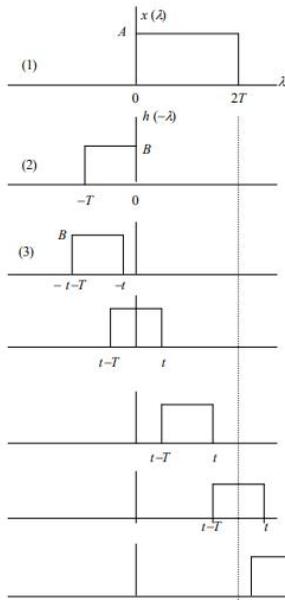
3. 1. 2. Contoh penyelesaian integral konvolusi

Soal: Carilah integral konvolusi antara 2 fungsi kotak yang terlihat pada gambar 3.2



Gambar 3.2 Dua fungsi kotak dengan tinggi A dan B , panjang T dan $2T$

Untuk lebih mudahnya dipakai cara yang kedua (gambar 3.3), yaitu: melipat dulu salah satu fungsinya. Dalam hal ini karena kedua fungsinya adalah sederhana (fungsi kotak) maka yang dipilih untuk dilipat dapat sebarang. Namun untuk menentukan batas integrasi pada waktu fungsi yang dilipat digeser, maka fungsi yang kedua yang tampaknya lebih mudah bila dipilih sebagai fungsi yang dilipat.



Misalkan hasil konvolusinya $y(t)$

Untuk $t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$, karena (1) dikalikan

(3) sama dengan 0 dimanapun

$$\text{Untuk } 0 < t < T \Rightarrow y(t) = \int_0^t AB \, d\lambda = [AB\lambda]_0^t = ABt$$

Untuk $T < t < 2T \Rightarrow$

$$y(t) = \int_{t-T}^t AB \, d\lambda = [AB\lambda]_{t-T}^t = ABT$$

Untuk $2T < t < 3T \Rightarrow$

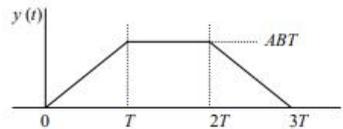
$$y(t) = \int_{t-T}^{2T} AB \, d\lambda = [AB\lambda]_{t-T}^{2T} = 3ABT - ABt$$

Untuk $t > 3T \Rightarrow y(t) = 0$, karena kedua fungsi sudah saling memisah

Gambar 3.3 Contoh penyelesaian integral konvolusi

Jadi hasilnya (gambar3.4) adalah:

- a. untuk $t < 0 \Rightarrow y(t) = 0$
- b. untuk $0 < t < T \Rightarrow y(t) = ABt$
- c. untuk $T < t < 2T \Rightarrow y(t) = ABT$
- d. untuk $2T < t < 3T \Rightarrow y(t) = 3ABT - ABt$
- e. untuk $t > 3T \Rightarrow y(t) = 0$



Gambar 3.4. Hasil konvolusi antara 2 fungsi kotak dengan panjang berbeda

Pengecekan

Hasil penyelesaian konvolusi dapat dicek dengan mencari nilainya pada waktu konvolusinya diskontinyu, yaitu pada saat $t = 0, T, 2T,$ dan $3T,$ yang didekati dari kiri dan dari kanan:

a. Untuk $t = 0,$ → Dari kiri (a), $y(t) = 0;$ dari kanan (b), $y(t) = ABt]$
 $t=0 = 0 \rightarrow$ sama

b. Untuk $t = T,$ → Dari kiri (b), $y(t) = ABt]_{t=T} = ABT;$ dari kanan (c), $y(t) = ABT \rightarrow$ sama

c. Untuk $t=2T,$ → Dari kiri (c), $y(t) = ABT;$ dari kanan (d), $y(t) = 3ABT - ABt]_{t=2T} = ABT \rightarrow$ sama

d. Untuk $t = 3T,$ → Dari kiri (d), $y(t) = 3ABT - ABt]_{t=3T} = 0;$ Dari kanan (e), $y(t) = 0 \rightarrow$ sama

Jadi untuk saat-saat $t = 0, T, 2T,$ dan $3T,$ nilai konvolusinya sama baik didekati dari kiri maupun dari kanan. Bila demikian hampir dapat dipastikan bahwa penyelesaiannya benar. Bila hasilnya tidak sama maka dapat dipastikan bahwa penyelesaiannya salah.

3. 1. 3. Konvolusi antara fungsi transient dan fungsi impuls

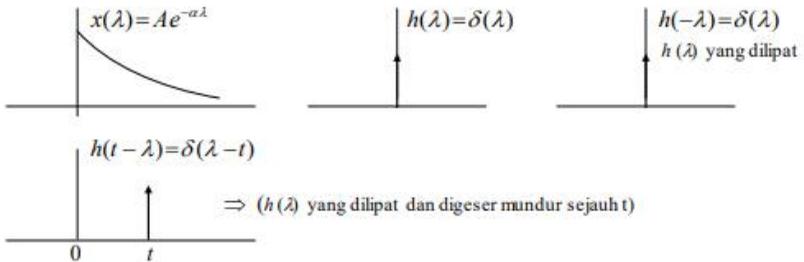
Fungsi transient atau aperiodik adalah fungsi waktu yang harganya hanya muncul satu kali (tidak terulang lagi) dan harga integralnya (disepanjang sumbu waktu) terbatas. Sebagai contoh fungsi transient adalah: fungsi impuls, fungsi exponential turun, fungsi kotak tunggal, dan sebagainya. Disini akan dipakai sifat-sifat fungsi impuls, yaitu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A \delta(t-t_0) dt = A \quad (3.5)$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (3.6)$$

Andaikan $x(t) = A e^{-\alpha t}$ dan $h(t) = \delta(t)$, berapa konvolusi antara keduanya? Dalam menjawabnya, yang dilipat dan digeser adalah $h(t)$ untuk lebih mudahnya (gambar 3.5)

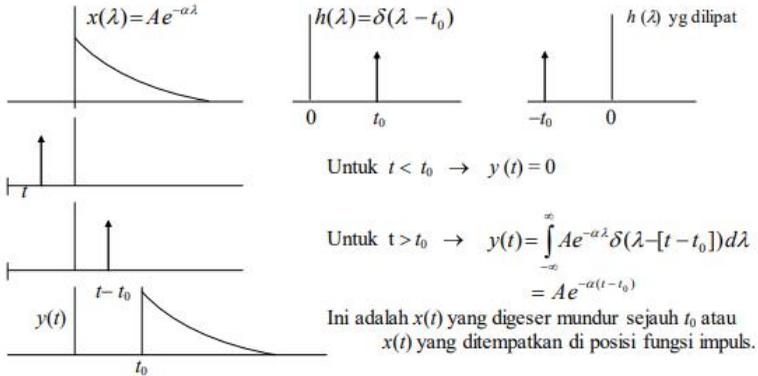


Gambar 3.5 Proses konvolusi antara fungsi sebarang dengan fungsi impuls

Berdasar gambar 3.5 tersebut dan sifat fungsi impuls persamaan (3.5), maka hasil konvolusi antara fungsi exponen dan fungsi impuls tersebut diatas adalah:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-a\lambda} \delta(t-\lambda) d\lambda = Ae^{-at} = x(t) \quad (3.7)$$

Jadi konvolusi antara suatu fungsi sebarang dengan impuls satuan adalah fungsinya itu sendiri. Apabila posisi impuls tidak di titik 0, maka hasil konvolusinya adalah fungsi itu sendiri yang digeser keposisi impuls tersebut (gambar 3.6)



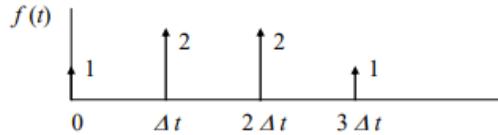
Gambar 3.6 Konvolusi antara sebarang fungsi dengan impuls pada posisi sebarang

3. 1. 4. Konvolusi antara 2 fungsi digital

Fungsi digital adalah fungsi yang nilainya ada hanya pada waktu-waktu yang terpisah dengan selang waktu yang sama. Selang waktu ini disebut sebagai waktu cuplik Δt . Misalkan nilai-nilai tersebut adalah 1, 2, 2, dan 1 yang terletak pada waktu: 0, Δt , $2 \Delta t$, dan $3 \Delta t$. Secara matematis fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$f(t) = \delta(t) + 2\delta(t - \Delta t) + 2\delta(t - 2\Delta t) + \delta(t - 3\Delta t) \quad (3.8)$$

Kalau digambarkan fungsi ini merupakan deretan impuls-impuls (gambar 3.7)



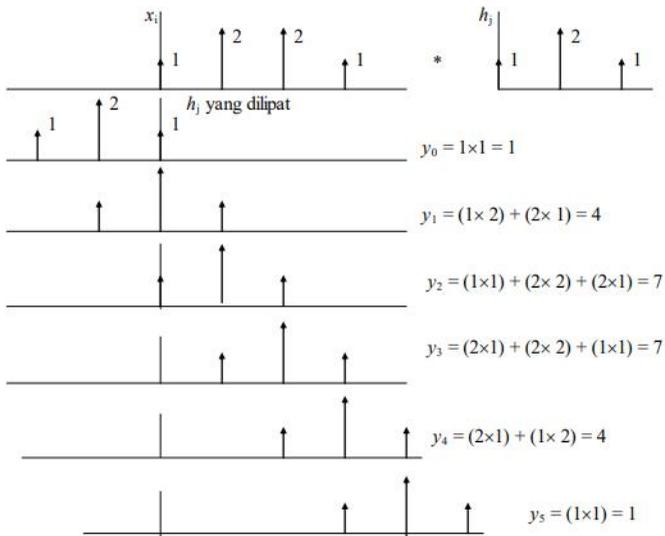
Gambar 3.7. Penggambaran fungsi digital secara matematis

Untuk lebih mudahnya (sehubungan dengan penggunaan computer), waktu cuplik ini berharga 1 (satu satuan waktu). Jadi fungsi digital merupakan suatu deretan nilai yang masing-masing terpisah satu satuan waktu. Oleh karena itu fungsi digital di atas cukup dinyatakan dengan deretan nilai-nilainya saja, yaitu:

$$f_k = (1, 2, 2, 1) \quad (3.9)$$

dengan nilai $k = 0, 1, 2,$ dan 3 (dimulai $k = 0$).

Konvolusi antara 2 fungsi digital dengan mudah dapat dijelaskan langsung dari contoh penyelesaiannya, misalnya konvolusi antara $x_i = (1, 2, 2, 1)$ dengan $h_j = (1, 2, 1)$. Gambar 3.8 menjelaskan penyelesaian konvolusi tersebut.



Gambar 3.8. Penyelesaian konvolusi antara 2 fungsi digital

Dari penyelesaian $x_i * h_j = y_k$ (gambar 3.8) tersebut dapat ditulis hubungan:

$$(1, 2, 2, 1) * (1, 2, 1) = (1, 4, 7, 7, 4,$$

Di sini tampak bahwa panjang $x_i = 4$, panjang $h_j = 3$, dan panjang $y_k = 6$. Secara umum akan berlaku:

$$(\text{panjang } y_k) = (\text{panjang } x_i) + (\text{panjang } h_j) - 1$$

Berdasar contoh penyelesaian diatas, maka konvolusi antara 2 fungsi digital dapat dinyatakan dengan perumusan matematis:

$$y_k = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) h(k-i) \quad (3.10)$$

dengan N adalah panjang x_i atau panjang h_j , yang mana yang lebih panjang.

3.1.5. Konvolusi antara 2 fungsi periodik

Fungsi periodik adalah fungsi waktu yang nilainya selalu berulang setiap periode tertentu, misalnya T . Fungsi periodik mempunyai panjang yang tak berhingga. Contoh fungsi periodik adalah fungsi sinus dan cosinus. Deretan fungsi berdurasi terbatas yang panjangnya tak berhingga juga akan membentuk fungsi periodik. Contohnya adalah fungsi gigi gergaji (deretan fungsi berbentuk segitiga), fungsi gelombang square (deretan fungsi berbentuk segi empat), sisir diract (deretan fungsi impuls), dan sebagainya.

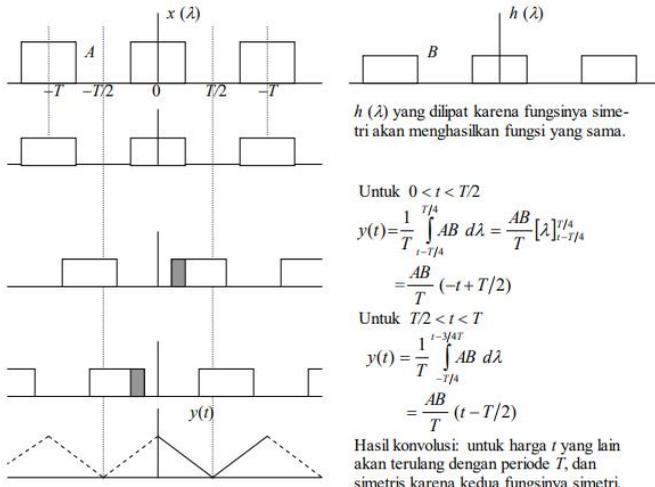
Dalam rumus konvolusi antara 2 fungsi transient (persamaan 3.1), disana ada operasi integral di sepanjang sumbu waktu dengan batas-batas integral dari $-\infty$ ke ∞ . Integrasi dengan batas-batas integral tersebut akan tidak

terdefinisi bila fungsi-fungsi yang diintegrasikan adalah fungsi periodik. Dengan demikian integral konvolusi antara 2 fungsi periodik harus didefinisikan berbeda, terutama yang menyangkut batas-batas integralnya.

Konvolusi antara 2 fungsi periodik $x(t)$ dan $h(t)$ kemudian didefinisikan sebagai:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda \quad (3.11)$$

dengan T adalah periode fungsi-fungsi periodik tersebut. Cara menyelesaikan integral konvolusi ini sama dengan integral konvolusi fungsi transient, yaitu dilipat, digeser (terbalik), dikalikan dan diintegrasikan. Tapi pekerjaannya tentu akan lebih sulit. Untuk lebih jelasnya langsung saja dengan contoh, misalnya konvolusi antara 2 fungsi periodik berupa deretan fungsi kotak dengan tinggi A dan B , lebar $T/2$, serta periode T . Gambar 3.9 akan menjelaskan urutan penyelesaian konvolusi tersebut.



Gambar 3.9 Konvolusi antara 2 fungsi periodik. Batas integral ditunjukkan oleh bagian yang diblok.

3. 2. Integral Korelasi

3. 2. 1. Definisi integral korelasi fungsi transient

Fungsi transient atau aperiodik adalah fungsi waktu yang harganya hanya muncul satu kali (tidak terulang lagi) dan harga integralnya (disepanjang sumbu waktu) terbatas. Sebagai contoh fungsi transient adalah: fungsi impuls, fungsi exponential turun, fungsi kotak tunggal, dan sebagainya.

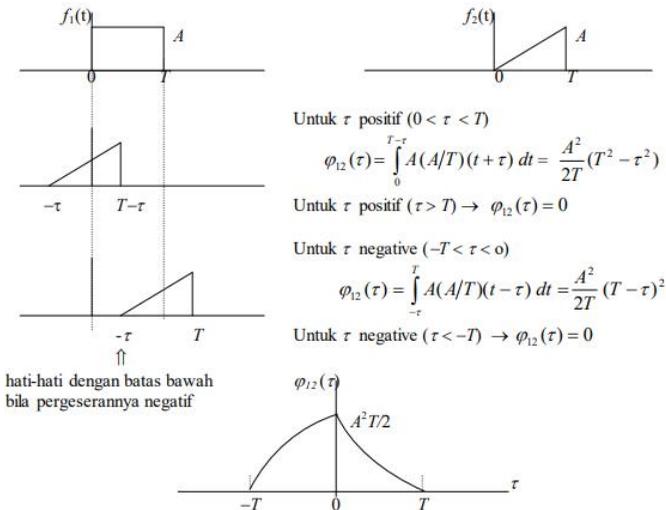
Integral korelasi antara 2 fungsi transient $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ didefinisikan sebagai:

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \quad (3.12)$$

dengan τ adalah pergeseran yang berdimensi waktu. Integral korelasi umumnya disebut sebagai “korelasi” saja. Biasanya $\varphi_{12}(\tau)$ disebut sebagai kroskorelasi antara 2 fungsi. Bila suatu fungsi $f_1(t)$ dikorelasikan dengan dirinya sendiri, maka hasilnya disebut otokorelasi:

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t + \tau) dt \quad (3.13)$$

Cara menyelesaikan integral korelasi (persamaan 3.13) yaitu: pertama menggeser $f_2(t)$ sejauh τ (kekiri positif, kekanan negatif), kedua mengalikannya dengan $f_1(t)$, dan yang ketiga menintegrasikan hasil kalinya tersebut. Untuk lebih jelasnya langsung saja dengan contoh yaitu kroskorelasi antara fungsi kotak dengan fungsi segitiga (gambar 3.10).



Gambar 3.10. Contoh cara menyelesaikan integral korelasi

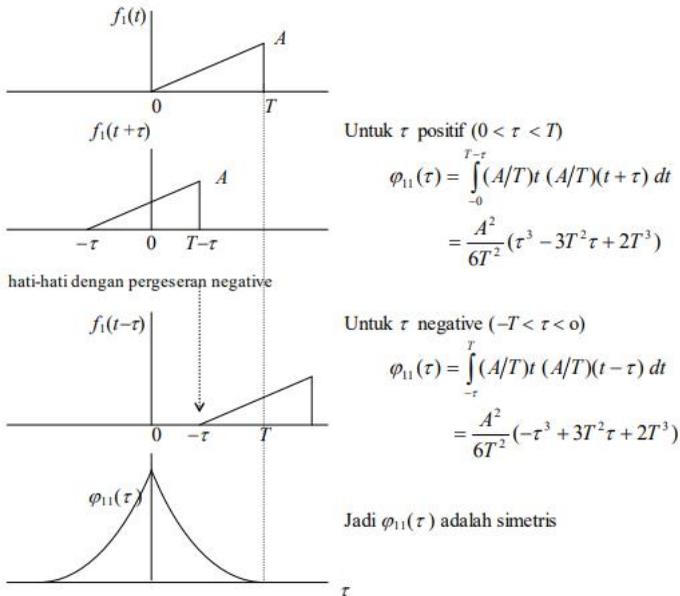
Gambar 3.10. Contoh cara menyelesaikan integral korelasi

3. 2. 2. Sifat integral korelasi

1. Pada umumnya kroskorelasi: $\varphi_{12}(\tau) \neq \varphi_{12}(-\tau)$, kecuali kedua fungsi yang dikorelasi- kan simetri (fungsi genap). Ini dapat dilihat pada contoh pada subbab 3. 2. 1..
2. Dalam proses kroskorelasi antara 2 fungsi, integral hasil kali kedua fungsi akan sama bila f_1 digeser kekiri atau f_2 digeser kekanan (atau sebaliknya), sehingga secara matematis dapat dituliskan relasi: $\varphi_{12}(\tau) = \varphi_{21}(-\tau)$

3. Dalam proses otokorelasi (korelasi dengan dirinya sendiri), bila fungsi yang satu digeser kekiri, nilai korelasinya akan sama bila fungsi yang lain digeser kekanan. Secara matematis dapat dituliskan hubungan :
$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}(-\tau).$$
 Atau dapat dikatakan bahwa $\varphi_{11}(\tau)$ selalu simetris atau fungsi genap.
4. Integral hasil kali pada proses otokorelasi akan maksimum bila pergeserannya sama dengan 0, atau $\varphi_{11}(0)$ adalah maksimum.
5. Integral korelasi fungsi-fungsi periodik adalah periodik dengan periode yang sama.
6. Otokorelasi fungsi random akan maksimum bila pergeserannya $\tau = 0$, dan menurun menjadi 0 bila pergeserannya sudah cukup jauh.

Pada Gambar 3.11 adalah contoh penyelesaian otokorelasi fungsi segitiga untuk menunjukkan sebagian sifat-sifat otokorelasi tersebut.



Gambar 3.11. Contoh penyelesaian otokorelasi

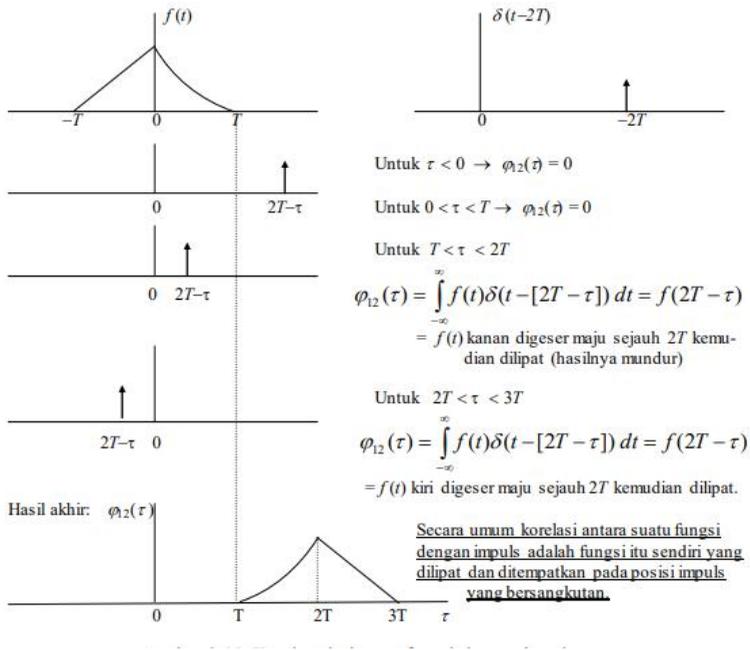
3. 2. 3. Korelasi antara suatu fungsi dengan impuls

Salah satu sifat fungsi impuls adalah integral hasil kalinya dengan suatu fungsi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (3.15)$$

Gambar 3.12 adalah contoh penyelesaian kroskorelasi antara suatu fungsi dengan impuls.

Dalam contoh ini akan ditekankan penyelesaian secara grafis (menggunakan gambar).



Gambar 3.12. Kroskorelasi suatu fungsi dengan impuls.

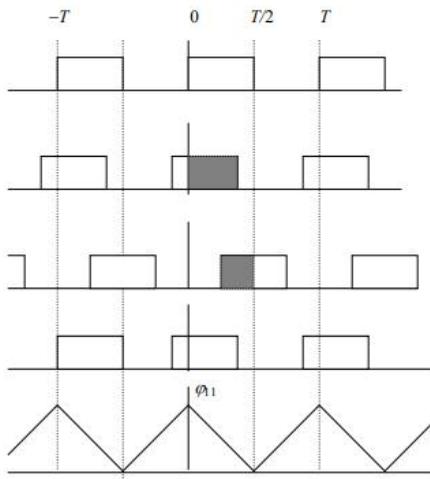
3. 2. 4. Korelasi antara fungsi-fungsi periodik

Fungsi periodik adalah fungsi waktu yang harganya selalu berulang setiap periode tertentu, misalnya T . Fungsi periodik

mempunyai panjang yang tak berhingga. Dengan demikian perumusan kroskorelasi (persamaan 3.13) tak dapat dipakai lagi karena integral dari $-\infty$ ke ∞ menjadi tidak terdefinisi karena karena harganya yang tidak menentu. Oleh karena itu kroskorelasi antara 2 fungsi periodik $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ didefinisikan sebagai.

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t + \tau) dt \quad (3.16)$$

dengan T adalah periode kedua fungsi periodik tersebut. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat contoh penyelesaian otokorelasi suatu fungsi periodik berupa deretan kotak (gambar 3.13).



Untuk $0 < \tau < T/2$

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = \frac{A^2}{T} \int_0^{(T/2)-\tau} dt \\ &= \frac{A^2}{T} ((T/2) - \tau) \end{aligned}$$

Yang diblok menunjukkan batas integral

Untuk $(T/2) < \tau < T$

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{\tau-T}^{T/2} A^2 dt \\ &= \frac{A^2}{T} (\tau - (T/2)) \end{aligned}$$

Untuk pergeseran selanjutnya harganya

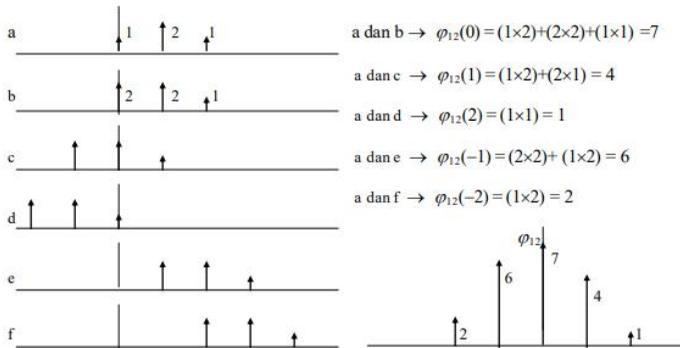
Akan berulang dengan periode T

φ_{11} untuk fungsi periodik juga simetri atau merupakan fungsi genap

Gambar 3.13. Contoh penyelesaian otokorelasi fungsi periodik

3. 2. 5. Korelasi fungsi-fungsi digital

Untuk jelasnya langsung contoh (gambar 3.14), yaitu kroskorelasi antara $f_1 = (1, 2, 1)$ dengan $f_2 = (2, 2, 1)$



Gambar 3.14. Contoh kroskorelasi 2 fungsi digital

Dari contoh pada gambar 3.14 tersebut dapat diturunkan perumusan kroskorelasi digital:

$$\varphi_{12}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} f_1(i) f_2(k+i) \quad (3.17)$$

3. 2. 6. Penggunaan integral korelasi

Di bawah ini akan dijelaskan beberapa contoh penggunaan integral korelasi:

1. Integral korelasi banyak dipergunakan untuk menyatakan besarnya korelasi antara 2 parameter secara kuantitatif. Dua parameter dikatakan mempunyai korelasi 100%, bila koefisien korelasinya sama dengan 1. Koefisien

korelasi ini adalah nilai integral korelasi yang dinormalisir.

2. Kroskorelasi banyak dipakai untuk mengitung beda waktu tiba antara 2 sinyal yang koheren yang terekam di dua titik. Sebagai contoh mencari kecepatan gelombang permukaan dari rekaman seismic yang tercatat di dua stasiun dapat dilakukan dengan teknik kroskorelasi ini. Dalam hal ini sinyal koheren akan mempunyai bentuk pola yang sama bila terekam di dua stasiun. Nilai kroskorelasi akan mencapai maksimum bila pergeserannya sama dengan beda waktu tiba gelombang seismic di dua stasiun yang bersangkutan. Teknik yang sama dapat dipakai untuk mencari kecepatan angin atau kecepatan asap yang keluar dari cerobong atau gunung api. Caranya dengan menggunakan dua detector ultraviolet (terpisah pada jarak tertentu) yang diarahkan keawan atau asap yang keluar dari cerobong atau gunung api. Dengan cara ini kecepatan asap atau angin dapat diketahui. Dalam hal ini awan atau asap akan menyerap sinar ultraviolet dari langit biru sebagai latar belakangnya.

3. Otokorelasi dapat dipakai untuk komunikasi antara 2 titik yang sangat jauh. Pada komunikasi ini sinyal yang dikirim dapat jauh tenggelam di dalam noise, sehingga pengfilteran yang umum tidak akan dapat memunculkan sinyal yang bersangkutan. Akan tetapi dengan mengkodekan pesan-pesan menjadi sinyal periodik yang dipancarkan dalam waktu yang cukup lama (per pesan), maka dengan teknik otokorelasi sinyal periodik ini dapat dimunculkan kembali walaupun sinyal tersebut jauh tenggelam di dalam noise. Sifat otokorelasi yang dipakai yaitu: otokorelasi sinyal random (noise) akan maksimum bila pergeserannya sama dengan 0 dan akan mendekati 0 pada pergeseran waktu yang tidak terlalu besar, sedang otokorelasi fungsi periodik akan periodik dengan frekuensi yang sama. Oleh karena itu otokorelasi sinyal campuran random dan periodik akan menghasilkan sinyal periodik (dengan frekuensi yang sama dengan sinyal periodik yang dicampurkan) bila pergeserannya sudah cukup jauh. Teknik ini banyak dicobakan orang untuk komunikasi antar bintang.
4. Kroskorelasi dan otokorelasi sering muncul dalam perumusan untuk filter tertentu, misalnya filter optimum

dari Winner, filter untuk memisahkan komponen medan listrik dan medan magnet dalam metode magnetotelurik dan sebagainya

BAB 4

TRANSFORMASI FOURIER

4. 1. Transformasi Fourier dan Analisis harmonik

Analisis harmonik sangat banyak digunakan di bidang sains (fisika, geofisika, dsb) dan teknologi (teknik elektro, mesin, komunikasi, informasi, dsb), karena analisis harmonik merupakan hal yang terpenting untuk menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan gejala-gejala periodik dan transient (sesaat).

Alat yang sangat penting dan fruitful untuk analisis harmonic adalah Transformasi Fourier, yaitu suatu formula matematis yang mentransformasikan fungsi dalam kawasan waktu menjadi fungsi lain dalam kawasan frekuensi. Sudah tentu formula matematis untuk transformasi Fourier berlaku untuk fungsi-fungsi yang lain, tidak hanya fungsi-fungsi waktu dan frekuensi saja. Pemakaian parameter waktu dan frekuensi dimaksudkan untuk memudahkan pemahaman mengenai transformasi Fourier, mengingat keberadaan kedua parameter tersebut sangat mudah dirasakan dan dipahami. Disamping itu pemakaian transformasi Fourier

yang paling banyak berkaitan dengan parameter waktu dan frekuensi tersebut.

Dalam sistem transmisi data (dalam bentuk sinyal), pengumpulan data (data collecting), pemrosesan data (data/signal processing), akan selalu muncul masalah yang biasa disebut sebagai sinyal gangguan atau noise. Gangguan ini pada umumnya bersifat random. Oleh karena itu, terutama dalam pemrosesan data telah berkembang pula teori yang mempelajari gejala random termasuk transformasi Fourier untuk fungsi random.

Untuk mempelajari gejala random, secara khusus konsep korelasi akan mendapatkan perhatian utama karena korelasi adalah alat yang paling penting untuk menangani gejala random atau gejala periodik dan transient yang mengandung fungsi random. Di samping itu penerapan teori Fourier untuk gejala random hanya dimungkinkan dengan melibatkan teori statistic dan teori kemungkinan (probabilitas)

4. 2. Jenis-jenis fungsi waktu

Fungsi waktu dapat dibedakan menjadi 3 jenis, yaitu fungsi-fungsi periodik, aperiodik (transient), dan random.

- a. Fungsi periodik adalah fungsi yang nilainya berulang pada setiap interval waktu tertentu. Interval waktu ini dikenal sebagai periode (T). Jumlah perulangan per satuan waktu dikenal sebagai frekuensi ($f = 1/T$). Panjang fungsi harus dari -4 s/d $+4$. Contoh fungsi periodik adalah fungsi-fungsi sinus, cosinus, gelombang kotak (square wave), gelombang gigi gergaji (saw teeth wave), dsb.
- b. Fungsi aperiodik atau transient adalah fungsi yang nilainya tak pernah terulang dengan periode tertentu. Panjang fungsi tersebut dapat sebarang, bahkan sampai 4. Contoh fungsi transient adalah fungsi eksponensial, fungsi kotak tunggal, dsb.
- c. Fungsi random adalah fungsi waktu yang nilainya tidak bisa diramalkan secara pasti, walaupun pada umumnya akan mengikuti aturan statistik tertentu.

4. 3. Deret Fourier

4. 3. 1. Bentuk umum deret Fourier

Deret Fourier merupakan transformasi Fourier dari fungsi waktu yang periodik. Fungsi periodik adalah fungsi yang nilainya terulang pada setiap periode tertentu dan panjangnya tak berhingga. Parameter yang berhubungan dengan keperiodikan biasanya adalah periode T , frekuensi f , atau frekuensi sudut ω . Menurut Transformasi Fourier, setiap fungsi periodic $x(t)$ dengan periode T_1 (frekuensi $f_1=1/T_1$) dapat diuraikan (decomposed) menjadi fungsi-fungsi sinus dan cosinus, sebagai:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n 2\pi f_1 t) + b_n \sin(n 2\pi f_1 t)] \quad (4.1)$$

Konstanta-konstanta a_0 , a_n , dan b_n dapat dicari berdasarkan sifat orthogonal fungsi sinus dan fungsi cosinus:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sin(m 2\pi f_1 t) \cos(n 2\pi f_1 t) dt = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \sin(m 2\pi f_1 t) \sin(n 2\pi f_1 t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{untuk } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{untuk } m \neq n \end{cases} \quad (4.3)$$

Berdasar sifat orthogonal ini, maka integral $x(t) dt$ dari $-T_1/2$ s/d $T_1/2$ akan memberikan:

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) dt \quad (4.4)$$

Selanjutnya integrasi $x(t) \cos(n 2\pi f_1 t) dt$ dari $-T_1/2$ s/d $T_1/2$ akan memberikan nilai a_n :

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \cos(n 2\pi f_1 t) dt, \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \text{ dst} \quad (4.5)$$

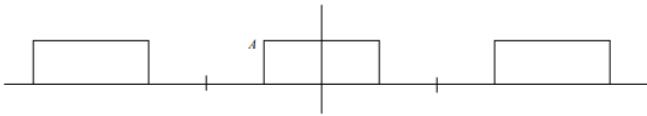
dan integrasi $x(t) \sin(n 2\pi f_1 t) dt$ dari $-T_1/2$ s/d $T_1/2$ akan memberikan nilai b_n :

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \sin(n 2\pi f_1 t) dt, \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \text{ dst} \quad (4.6)$$

Dengan demikian dekomposisi atau penguraian fungsi periodic $x(t)$ berdasar persamaan-persamaan (4.1), (4.5), (4.6), dan (4.7) sudah terdefinisi dengan baik. Persamaan-persamaan inilah yang merupakan transformasi Fourier untuk fungsi periodik, yang lebih dikenal sebagai deret Fourier.

Contoh 1

Uraikan fungsi periodic $x(t)$ berupa gelombang kotak (square wave) panjang tak berhingga dengan periode T_1 , tinggi A , dan simetris terhadap sumbu tegak (gambar 4.1) menjadi jumlahan fungsi-fungsi sinus dan cosinus.



Gambar 4.1. Fungsi periodic berupa gelombang kotak panjang tak berhingga dan simetris terhadap sumbu tegak

jawab:

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/4}^{T_1/4} A dt = A \quad (4.7)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \cos(n 2\pi f_1 t) dt = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/4}^{T_1/4} A \cos(n 2\pi f_1 t) dt = 2A \frac{\sin(n 2\pi / 4)}{n\pi} \quad (4.8)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \sin(n 2\pi f_1 t) dt = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/4}^{T_1/4} A \sin(n 2\pi f_1 t) dt = 0 \quad (4.9)$$

Nilai a_n pada persamaan (4.9) dapat diperinci menjadi:

$$a_1 = \frac{2A}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{-2A}{3\pi}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{2A}{5\pi}, \quad \text{dst}$$

Dengan demikian, berdasar persamaan (4.1), fungsi periodic gelombang kotak yang simetris terhadap sumbu tegak dapat diuraikan dalam fungsi-fungsi cosinus menjadi:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos(2\pi f_1 t) - \frac{2A}{3\pi} \cos(6\pi f_1 t) + \frac{2A}{5\pi} \cos(10\pi f_1 t) - \text{dst}$$

Jadi di dalam fungsi periodic sebarang dimungkinkan terkandung: komponen searah (DC) yang berfrekuensi 0, komponen fungsi sinus/cosinus dengan frekuensi tertentu yang dikenal sebagai frekuensi dasar (fundamental frequency) f_1 , dan komponen fungsi sinus/ cosinus dengan frekuensi-frekuensi harmonic yang lebih tinggi, yaitu $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, dst (kelipatan bulat frekuensi dasar).

4. 3. 2. Deret Fourier dalam bentuk eksponensial

Fungsi sinus/cosinus dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial:

$$\cos(2\pi n f_1 t) = \frac{1}{2} (e^{jn2\pi f_1 t} + e^{-jn2\pi f_1 t}) \quad (4.13)$$

$$\sin(2\pi n f_1 t) = \frac{1}{2j} (e^{jn2\pi f_1 t} - e^{-jn2\pi f_1 t}) \quad (4.14)$$

Bila persamaan (4.13) dan (4.14) dimasukkan dalam persamaan (4.1), akan diperoleh:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{jn2\pi f_1 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) e^{-jn2\pi f_1 t} \quad (4.15)$$

Dengan memperkenalkan nilai negatif untuk n, maka dapat didefinisikan:

$$a_{-n} = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \cos(n 2\pi f_1 t) dt = a_n \quad (4.16)$$

$$b_{-n} = -\frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) \sin(n 2\pi f_1 t) dt = -b_n \quad (4.17)$$

dan mengingat $\cos(-n 2\pi f_1 t) = \cos(n 2\pi f_1 t)$ & $\sin(-n 2\pi f_1 t) = -\sin(n 2\pi f_1 t)$, maka suku terakhir dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) e^{-jn2\pi f_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} (a_n - jb_n) e^{jn2\pi f_1 t} \quad (4.18)$$

sehingga persamaan tersebut berubah menjadi:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{jn2\pi f_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{jn2\pi f_1 t} \quad (4.19)$$

$$X(n) = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) \quad \text{untuk } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ dst} \quad (4.20)$$

dengan memasukkan persamaan (4.6) dan (4.7) dalam pers (4.20) akan didapatkan:

$$X(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt \quad \text{untuk } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ dst} \quad (4.21)$$

5. 3. 3. Spektrum

Berdasar (4.20) dan (4.21), $X(n)$ merupakan fungsi frekuensi dan pada umumnya berbentuk kompleks. Oleh karena itu $X(n)$ dinamai spectrum kompleks dari $x(t)$. Karena frekuensi yang terkandung dalam fungsi periodic, yaitu frekuensi dasar dan harmoniknya mempunyai nilai yang diskrit, maka spektrumnya merupakan spectrum garis (line spectrum).

Bilangan complex C akan terdefinisi oleh 2 parameter, yang dapat dinyatakan dengan bagian real a dan bagian imajiner b atau *amplitudo* A dan fase θ , secara umum berbentuk:

$$C = a + jb = Ae^{j\theta}$$

Hubungan antara parameter-parameter tersebut adalah:

$$A = |C| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \quad \text{dan} \quad \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right) \quad (4.22)$$

Berdasar persamaan (4.22) dan (4.23), persamaan (4.20)

$X(n) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ dapat ditulis menjadi:

$$X(n) = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \exp\left[j \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\right] \quad (4.23)$$

Sehingga spectrum kompleks (4.24) dapat dituliskan dalam bentuk berpasangan antara spectrum amplitudo A_n dan spectrum phase θ_n

$$A_n = |X(n)| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{dan} \quad \theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

atau antara Spektrum Real R_n dan Spektrum Imajiner I_n :

$$R_n = \frac{1}{2}a_n \quad \text{dan} \quad I_n = -\frac{1}{2}b_n$$

dapat ditulis dalam bentuk:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(n)| e^{j(n2\pi f_1 t + \theta_n)} \quad (4.24)$$

Persamaan (4.21) yang merupakan representasi fungsi dalam kawasan frekuensi (frequency domain), dikenal sebagai transformasi Fourier dari fungsi periodic $x(t)$ menjadi $X(n)$. Sebaliknya persamaan (4.19) adalah transformasi Fourier invers dari $X(n)$ menjadi $x(t)$, yang

merupakan manifestasi fungsi dalam kawasan waktu (time domain). Oleh karena itu persamaan (4.21) dan (4.19) perlu ditulis ulang bersama sebagai pasangan transformasi Fourier:

$$X(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt \quad (4.25)$$

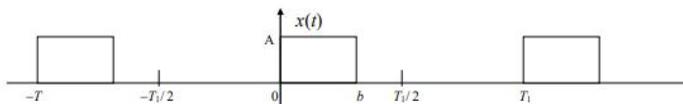
dan

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{jn2\pi f_1 t} \quad (4.26)$$

yang masing-masing adalah transformasi Fourier dari yang lain.

Contoh 2

Hampir sama dengan contoh 1, yaitu mendapatkan deret Fourier fungsi periodik $x(t)$, yang berupa gelombang kotak panjang tak berhingga dengan periode T_1 , amplitude A , dan lebar kotak b (Gambar 4.2).



Gambar 4.2. Fungsi periodik gelombang kotak dengan periode T dan lebar kotak b

Spektrum kompleks dari $x(t)$, berdasar (4.28) adalah:

$$X(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} A e^{-jn2\pi f_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_0^b A e^{-jn2\pi f_1 t} dt = \frac{Ab}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) e^{-jn2\pi f_1 (T_1/4)}$$

sehingga uraian $x(t)$ dalam bentuk eksponensial (4.29) adalah:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Ab}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) \exp \left[jn2\pi f_1 \left(t - \frac{b}{2} \right) \right] \quad (4.28)$$

Jika $b = T_1/2$, maka $x(t)$ akan menjadi:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \left(\frac{\sin n\pi/2}{n\pi/2} \right) \exp [jn2\pi f_1 (t - T_1/4)]$$

yang dalam bentuk fungsi-fungsi cosinus adalah:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[\cos 2\pi f_1 \left(t - \frac{T_1}{4} \right) - \frac{1}{3} \cos 6\pi f_1 \left(t - \frac{T_1}{4} \right) + \frac{1}{5} \cos 10\pi f_1 \left(t - \frac{T_1}{4} \right) \right] - \dots$$

Jadi berdasar fungsi periodik gelombang kotak (Gambar 4.2) akan mempunyai:

1. Spektrum kompleks:

$$X(n) = \frac{Ab}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) e^{-jn2\pi f_1(T_1/4)}$$

2. Spektrum amplitudo:

$$A_n = |X(n)| = \left| \frac{Ab}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) \right|$$

3. Spektrum fase: $\theta_n = n2\pi f_1 \left(\frac{T_1}{4} \right) = \frac{n\pi}{2}$

4. Spektrum real:

$$R_n = \frac{1}{2} a_n = \frac{Ab}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

5. Spektrum imajiner:

$$I_n = -\frac{1}{2} b_n = -\frac{Ab}{T_1} \left(\frac{\sin n\pi b/T_1}{n\pi b/T_1} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

Kalau diperinci spektrum tersebut menjadi:

$$A_0 = \frac{Ab}{T_1}, \quad A_1 = A_{-1} = \left| \frac{A}{\pi} \sin(\pi b/T_1) \right|, \quad A_2 = A_{-2} = \left| \frac{A}{2\pi} \sin(2\pi b/T_1) \right|, \quad \text{dst}$$

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -\theta_{-1} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\theta_{-2} = \pi, \quad \theta_3 = -\theta_{-3} = \frac{3\pi}{2}, \quad \text{dst}$$

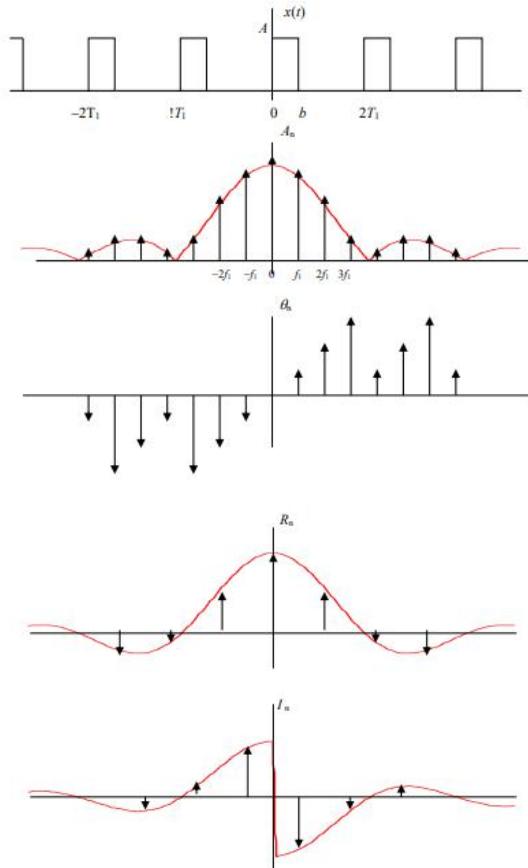
$$R_0 = \frac{Ab}{T_1}, \quad R_1 = R_{-1} = 0, \quad R_2 = R_{-2} = -\frac{A}{2\pi} \sin(2\pi b/T_1), \quad R_3 = R_{-3} = 0,$$

$$R_4 = R_{-4} = \frac{A}{4\pi} \sin(4\pi b/T_1), \quad \text{dst}$$

$$I_1 = -I_{-1} = \frac{A}{\pi} \sin(\pi b/T_1), \quad I_2 = -I_{-2} = 0, \quad I_3 = -I_{-3} = \frac{A}{3\pi} \sin(3\pi b/T_1),$$

$$I_4 = -I_{-4} = 0, \quad I_5 = -I_{-5} = \frac{A}{5\pi} \sin(5\pi b/T_1), \quad \text{dst}$$

Gambar 4.3 menjelaskan bagaimana penampilan spektrum-spektrum tersebut bersama sifat-sifatnya. Spektrum amplitudo harus simetris (fungsi genap) dan positif (nilai absolut), spektrum phase selalu antisimetris (fungsi ganjil), spektrum real selalu simetri, dan spektrum imajiner selalu antisimetris. Gambar 4.3 adalah spektrum-spektrum amplitudo, phase, real, dan imajiner untuk gelombang kotak dengan lebar $b = T_1/4$.



Gambar 4.3. Spektrum amplitudo (genap), phase (ganjil), real (genap), dan imajiner (ganjil). Spektrum amplitudo mempunyai amplop (pembatas) berupa nilai absolute sinus cardinal (($\sin f$) / f), yang akan melebar bila nilai b makin kecil. Jarak antar garis spektrum selalu sama dengan $f_1=1/T_1$.

Bila $b = T_1/2$, maka masalahnya menjadi hampir sama dengan contoh 1. Perbedaan hanya pada phase gelombangnya yang berbeda $T_1/4$. Dalam hal ini $a_0 = A / 2$, dan $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$. Nilai a_0 menunjukkan adanya komponen searah (DC) dalam $x(t)$, yang sangat jelas karena nilai rata-rata sebagian besar fungsinya berada di atas sumbu absis (horizontal). Nilai $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$ menunjukkan bahwa $x(t)$ tidak mempunyai komponen cosinus. Ini dapat dimengerti karena bila $x(t)$ digeser turun sejauh $A/2$, fungsi $x(t)$ akan menjadi fungsi ganjil. Sementara itu berdasar (3.42), nilai $b_n = 2 I_n$, sehingga $b_1 = 2A / \pi$, $b_2 = 0$, $b_3 = 2A / 3\pi$, $b_4 = 0$, $b_5 = 2A / 5\pi$. Nilai b_n yang tidak sama dengan 0 (untuk n ganjil) menunjukkan bahwa $x(t)$ mempunyai komponen sinus dengan frekuensi kelipatan ganjil dari f_1 . Dengan demikian uraian (dekomposisi) dari $x(t)$ dapat dituliskan sebagai:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sin 2\pi f_1 t + \frac{2A}{3\pi} \sin 6\pi f_1 t + \frac{2A}{5\pi} \sin 10\pi f_1 t + \dots$$

Persamaan (4.43) dengan suku-suku sinus ini sebenarnya sama dengan persamaan (4.33) yang terdiri dari

suku-suku cosinus. Pada umumnya dalam perderetan Fourier kompleks, $x(t)$ diuraikan menjadi suku-suku cosinus (dengan beda fase). Ini bukan merupakan masalah karena:

1. Fungsi sinus akan sama dengan fungsi cosinus yang fasenya $\pi / 2$.
2. Jumlahan fungsi sinus dan cosinus dengan frekuensi yang sama akan menghasilkan fungsi cosinus dengan amplitudo dan phase tertentu (frekuensi sama).

4. 3. 4. Korelasi

A. Kroskorelasi

Dalam teori analisis harmonik, korelasi memegang peranan yang sangat penting. Korelasi antara 2 buah fungsi adalah parameter yang menunjukkan seberapa dekat hubungan antara 2 fungsi, yang secara matematis untuk fungsi periodik

dirumuskan sebagai:

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

dengan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ mempunyai frekuensi dasar yang sama ($1/T_1$) dan τ adalah pergeseran waktu kontinu yang nilainya

antara -4 s/d 4 . Karena formula matematis untuk korelasi berbentuk integral, maka korelasi sering disebut sebagai integral korelasi. Karena $\varphi_{12}(\tau)$ merupakan korelasi antara 2 fungsi waktu yang berbeda, maka $\varphi_{12}(\tau)$ dikenal sebagai kroskorelasi.

Salah satu sifat yang penting yang berhubungan dengan integral kroskorelasi (4.44) adalah:

$$\Phi_{12}(n) = \bar{X}_1(n) X_2(n)$$

dengan $X_1(n)$ dan $X_2(n)$ adalah transformasi Fourier dari fungsi waktu $x_1(t)$ dan $x_2(t)$, dan $\bar{X}_1(n)$ adalah konjugate $X_1(n)$

Relasi (4.45) dapat dijabarkan dengan mengembangkan (expansion) $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dalam bentuk deret Fourier:

$$x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1(n) e^{jn2\pi f_1 t}$$

dan

$$x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2(n) e^{jn2\pi f_1 t}$$

yang spectrum kompleksnya adalah:

$$X_1(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt$$

dan

$$X_2(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_2(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt$$

Dengan menuliskan $x_2(t + \tau)$ pada persamaan (4.49) dan memasukkannya pada persamaan (4.44) akan diperoleh relasi:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2(n) e^{jn2\pi f_1(t+\tau)}$$

Dengan menempatkan tanda Sigma (penjumlahan) berada di depan tanda integral di ruas kanan persamaan (4.50) diperoleh:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2(n) e^{jn2\pi f_1 \tau} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) e^{jn2\pi f_1 t} dt$$

Berdasar (4.48), nilai integral terakhir pada persamaan (4.51) adalah $\bar{X}_1(n)$, sehingga (4.51) menjadi:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{X}_1(n) X_2(n)] e^{jn2\pi f_1 \tau}$$

sehingga berdasar rumus transformasi Fourier, spekturnya adalah:

$$\bar{X}_1(n) X_2(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-jn2\pi f_1 \tau} d\tau \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

Dengan demikian:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(t + \tau) dt \quad \text{dan} \quad \bar{X}_1(n) X_2(n)$$

merupakan pasangan transformasi Fourier. Kesimpulan terpenting yang dapat diambil dari hubungan antara korelasi dan transformasi Fourier adalah: “Integral korelasi antara $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian antara $\bar{X}_1(n)$ dengan $X_2(n)$ dalam kawacan frekuensi”.

B. Autokorelasi

Autokorelasi suatu fungsi periodic $x_1(t)$ adalah integral korelasi antara fungsi tersebut dengan dirinya sendiri, sehingga bentuk fungsi autokorelasinya adalah:

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_1(t + \tau) dt$$

Transformasi Fourier dari fungsi autokorelasi (4.55), berdasar persamaan (4.52) adalah:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_1(t + \tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\bar{X}_1(n) X_1(n)] e^{jn2\pi f_1\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n(n)|^2 e^{jn2\pi f_1\tau}$$

sehingga spectrum $\varphi_{11}(t)$ adalah:

$$\Phi_{11}(n) = |F_1(n)|^2$$

Dalam hal ini hubungan antara $\varphi_{11}(t)$ dengan $\Phi_{11}(n)$ adalah:

$$\varphi_{11}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(n) e^{jn2\pi f_1\tau}$$

dan sebaliknya

$$\Phi_{11}(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \phi_{11}(\tau) e^{-jn2\pi f_1\tau} d\tau$$

4.3.5. Konvolusi

Konvolusi antara 2 fungsi waktu periodik $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dengan periode T_1 adalah

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

Sesuai dengan bentuk matematisnya, konvolusi sering disebut sebagai integral konvolusi, yang dalam proses penyelesaiannya termasuk menggeser sejauh τ dan melipat (convolve) fungsi $x_2(t)$ menjadi $x_2(-t)$.

Fungsi konvolusi (4.60), kalau diuraikan (expand, decompose) dalam bentuk deret Fourier akan menjadi:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X_1(n)X_2(n)] e^{jn2\pi f_1\tau}$$

yang pasangan transformasi Fouriernya dari adalah:

$$X_1(n)X_2(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-jn2\pi f_1\tau} d\tau \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

Hubungan antara (4.61) dan (4.62) dapat dituliskan dalam bentuk pasangan transformasi Fourier yang sederhana, yaitu:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt \quad \text{dan}$$

$$X_1(n)X_2(n)$$

yang lebih mudah diingat dengan pernyataan: “Integral konvolusi dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian dalam kawasan frekuensi”

Kebenaran persamaan (4.61) dapat dibuktikan dengan memasukkan pengembangan $x_2(\tau-t)$ dalam bentuk deret Fourier, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2(n) e^{jn2\pi f_1(\tau-t)}$$

Dengan menempatkan tanda Sigma (penjumlahan) berada di depan tanda integral di ruas kanan persamaan (4.64) diperoleh:

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_2(n) e^{jn2\pi f_1 \tau} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt$$

atau

$$\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x_1(t) x_2(\tau - t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_1(n) X_2(n) e^{jn2\pi f_1 \tau}$$

Jadi terbukti bahwa integral konvolusi antara $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ mempunyai hubungan pasangan transformasi Fourier dengan $X_1(n) X_2(n)$

4. 4. Integral Fourier

4. 4. 1. Formulasi Integral Fourier

Integral Fourier adalah transformasi Fourier untuk fungsi aperiodik atau transient, yaitu fungsi waktu yang nilainya tidak terulang pada setiap periode tertentu. Untuk mendapatkan perumusan integral Fourier dapat dilakukan

melalui pendekatan dengan deret Fourier untuk fungsi periodik.

Pasangan transformasi Fourier untuk fungsi periodik $x(t)$ adalah:

$$X(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt$$

dab

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{jn2\pi f_1 t}$$

Dengan memasukkan (4.67) ke (4.68) akan diperoleh:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_1 t} \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(\sigma) e^{-jn2\pi f_1 \sigma} d\sigma$$

Karena $1/T_1 = f_1$, maka persamaan (4.69) dapat ditulis menjadi

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn2\pi f_1 t} f_1 \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(\sigma) e^{-jn2\pi f_1 \sigma} d\sigma$$

Sekarang, bila T_1 menjadi tak berhingga ($T_1 \rightarrow \infty$), maka $x(t)$ yang periodik akan menjadi aperiodik (transient), frekuensi dasar f_1 akan menjadi diferensial df , kelipatan frekuensi

dasar nf_1 akan menjadi frekuensi kontinu f , dan simbol penjumlahan Σ akan menjadi integral \int dengan kisaran (range) frekuensi kontinu ($-\infty \rightarrow \infty$). Oleh karena itu deret Fourier (4.70) akan berubah menjadi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) e^{-j2\pi f \sigma} d\sigma$$

Persamaan (4.71) adalah transformasi Fourier untuk fungsi aperiodik yang merupakan persamaan integral, sehingga lebih dikenal sebagai Integral Fourier. Berdasar persamaan ini $x(t)$ akan mempunyai integral Fourier bila:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \text{berhingga}$$

Dua relasi timbal balik (pasangan) transformasi Fourier untuk fungsi aperiodik atau transient (Integral Fourier), berdasar (4.71) dapat dituliskan sebagai:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

4. 4. 2. Spektrum

Transformasi Fourier dari $x(t)$, yaitu $X(f)$, berdasar (4.74) merupakan fungsi frekuensi yang kontinyu, yang pada umumnya berbentuk kompleks. Oleh karena itu $X(f)$ disebut sebagai Spektrum Kompleks, dan sering disebut juga sebagai spektrum frekuensi, yang bersifat kontinyu (spektrum kontinyu) dari fungsi aperiodik $x(t)$.

Spektrum kompleks selalu dapat diuraikan menjadi spektrum real $R(f)$ dan spektrum imajiner $I(f)$, sehingga spektrum kompleks $X(f)$ dapat dituliskan sebagai:

$$X(f) = R(f) + j I(f)$$

Dari bagian real dan imajiner ini dapat diturunkan pernyataan spektrum kompleks dalam bentuk yang lain,

yaitu spektrum amplitudo:

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$

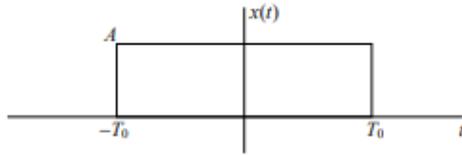
dan spektrum fase:

$$\theta(f) = \tan^{-1} \frac{I(f)}{R(f)}$$

Spektrum fungsi aperiodik $x(t)$ adalah spektrum kontinyu, yang berarti bahwa fungsi aperiodik mengandung semua frekuensi dari $-\infty$ s/d $+\infty$ dengan perubahan nilai $\Delta f \rightarrow 0$.

Contoh

Carilah spektrum pulsa kotak (fungsi kotak tunggal) dengan tinggi A , lebar $2T_0$, dan simetris terhadap sumbu tegak (fungsi genap) seperti pada gambar 4.4.

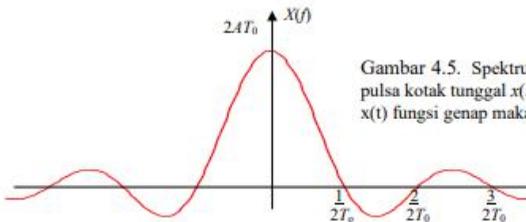


Gambar 4.4. Pulsa kotak (fungsi kotak tunggal)

Spektrum untuk pulsa kotak tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan (4.74), yaitu:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T_0}^{T_0} A e^{-j2\pi f t} dt = 2AT_0 \frac{\sin 2\pi T_0 f}{2\pi T_0 f}$$

yang grafiknya dapat dilihat pada gambar 4.5.



Gambar 4.5. Spektrum $X(f)$ dari pulsa kotak tunggal $x(t)$. Karena $x(t)$ fungsi genap maka $X(f) = R(f)$

4. 4. 3. Korelasi

A. Korelasi silang

Korelasi silang atau kroskorelasi antara dua fungsi aperiodik atau transient $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah:

$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

sering disebut juga sebagai integral korelasi.

Kalau dalam kawasan waktu $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ terhubung melalui integral korelasi, bagaimanakah hubungan antara $X_1(f)$ dan $X_2(f)$ dalam kawasan frekuensi? Pertanyaan ini dapat dijawab sebagai berikut. Transformasi Fourier invers dari $x_2(t + \tau)$, berdasar (4.13) adalah:

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j2\pi f (t+\tau)} df$$

Dengan memasukkan (4.80) kedalam persamaan (4.79) akan diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j2\pi f (t+\tau)} df$$

Bila urutan integrasi pada (4.81) dibalik, akan diperoleh hubungan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j2\pi f\tau} df \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{j2\pi ft} dt$$

Dengan menggunakan rumus transformasi Fourier (4.74), maka conjugate spektrum $x_1(t)$, yaitu $\bar{X}_1(f)$ dapat dituliskan sebagai:

$$\bar{X}_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{j2\pi ft} dt ,$$

sehingga persamaan (4.82) menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}_1(f) X_2(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Persamaan (4.84) menunjukkan bahwa integral $x_1(t) x_2(t + \tau) dt$ adalah transformasi Fourier dari $\bar{X}_1(f) X_2(f)$, sehingga transformasi inversnya adalah;

$$\bar{X}_1(f) X_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$$

Dengan demikian: $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt$ dan

$$\bar{X}_1(f)X_2(f)$$

merupakan pasangan transformasi Fourier. Untuk lebih mudah mengingatnya hubungan ini dapat dikatakan: ‘Integral korelasi antara $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian antara $\bar{X}_1(f)$ dengan $X_2(f)$ dlm kawasan frekuensi’.

Theorema Parseval

Transformasi Fourier dari integral korelasi antara $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ yang terlihat pada persamaan (4.84) berlaku untuk semua harga τ . Bila $\tau = 0$, maka (4.84) akan menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}_1(f)X_2(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)\bar{X}_2(f) df$$

Persamaan (4.87) ini lebih dikenal sebagai theorema Parseval, yang mengatakan bahwa integral perkalian antara 2 fungsi dalam kawasan waktu, akan sama dengan integral perkalian antara spektrum salah satu fungsinya dengan spektrum conjugate fungsi yang lain dalam kawasan frekuensi.

B. Autokorelasi

Autokorelasi sebuah fungsi adalah integral korelasi fungsi tersebut dengan dirinya sendiri. Oleh karena itu autokorelasi dari fungsi $x_1(t)$ dapat dituliskan sebagai:

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_1(t + \tau) dt$$

Berdasar persamaan (4.84), dengan menggantikan $x_2(t)$ dengan $x_1(t)$ akan diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_1(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}_1(f) X_1(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

Dengan demikian spektrum fungsi autokorelasi $\varphi_{11}(\tau)$ adalah:

$$\Phi_{11}(f) = |X_1(f)|^2$$

Persamaan (4.90) menunjukkan bahwa spektrum suatu fungsi autokorelasi dari suatu fungsi sama dengan spektrum amplitudo kwadrat dari fungsi yang bersangkutan. Karena Amplitudo kuadrat berkaitan dengan daya (power), maka spektrum fungsi autokorelasi (4.90) merupakan spektrum

daya (power spectrum) dari fungsi waktu yang bersangkutan.

4. 4. 4. Konvolusi

Konvolusi atau integral konvolusi antara dua fungsi aperiodik atau transient $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah:

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

Kalau dalam kawasan waktu $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ terhubung melalui integral konvolusi, maka hubungan antara $X_1(f)$ dan $X_2(f)$ dalam kawasan frekuensi akan merupakan perkalian. Kebenaran pertanyaan ini dapat dibuktikan sebagai berikut. Transformasi Fourier invers dari $x_2(\tau - t)$, berdasar (4.73) adalah:

$$x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j2\pi f (\tau-t)} df$$

Dengan memasukkan (4.92) kedalam persamaan (4.91) akan diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j2\pi f(\tau-t)} df$$

Bila urutan integrasi pada (4.93) dibalik, akan diperoleh hubungan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_2(f) e^{j2\pi f\tau} df \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Disini dapat ditulis ulang perumusan transformasi Fourier (4.74) dari fungsi waktu $x_1(t)$, yaitu $\bar{X}_1(f)$:

$$X_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt ,$$

shg pers menjadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) X_2(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Persamaan (4.96) menunjukkan bahwa integral $x_1(t) x_2(\tau - t) dt$ adalah transformasi Fourier dari $X_1(f) X_2(f)$, sehingga transformasi inversnya adalah;

$$X_1(f) X_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$$

Dengan demikian: $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt$ dan

merupakan pasangan transformasi Fourier. Untuk lebih mudah mengingatnya hubungan ini dapat dikatakan: “Integral konvolusi antara $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian antara $X_1(f)$ dengan $X_2(f)$ dalam kawasan frekuensi”.

Mengingat posisi $X_1(f)$ dan $X_2(f)$ pada (4.98) dapat dipertukarkan, maka posisi $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ juga dapat dipertukarkan, sehingga

$$\rho_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(\tau - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) x_1(\tau - t) dt = \rho_{21}(\tau)$$

Karena dalam proses penyelesaian integral konvolusi ada proses perlipatan pada salah satu fungsinya maka (4.99) sangat menguntungkan untuk memilih fungsi mana yang sebaiknya dilipat sehingga penyelesaiannya menjadi mudah.

4. 5. Bentuk-bentuk alternatif transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah alat yang sangat penting untuk pengolahan sinyal (signal processing), sehingga transformasi ini sangat banyak dipakai di bidang sains dan

teknologi, seperti di bidang matematika, fisika, teknik (elektro, komunikasi), geofisika, dan sebagainya. Oleh karena itu bentuk transformasi Fourier yang dipakai juga berbeda satu sama lain.

Dalam buku-buku matematika dan fisika

Deret Fourier:
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jnt} \quad \text{dan}$$

$$X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jnt} dt$$

Intrgral Fourier:
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha) e^{j\pi x} d\alpha \quad \text{dan}$$

$$X(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\pi t} dt$$

Dalam buku-buku teknik (elektro, mesin, komunikasi, fisika)

Deret Fourier:
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{j\omega_n t} \quad \text{dan}$$

$$X(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Integral Fourier: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ dan

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

dengan ω adalah frekuensi sudut yang dimiliki oleh $x(t)$

Dalam buku-buku geofisika dan pengolahan data

Deret Fourier: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) e^{jn2\pi f_1 t}$ dan

$$X(n) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt$$

Integral Fourier: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$ dan

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

dengan f adalah frekuensi yang dikandung oleh $x(t)$

BAB 5

TEORI FILTER

5. 1. Dasar-dasar teori filter

Filter atau tapis adalah suatu perangkat untuk menghilangkan atau paling tidak mengurangi gangguan atau sinyal yang tidak diinginkan yang menyertai suatu sinyal utama atau sinyal yang diharapkan.

Sebagai suatu perangkat filter dapat berwujud sebagai perangkat keras (hardware) atau perangkat lunak (software). Sebelum computer digital dikembangkan, filter hanya dikenal dalam bentuk perangkat keras. Sebagai contohnya adalah filter-filter frekuensi yang umumnya terdiri dari rangkaian resistor R , inductor L , dan capacitor C . Dengan perkembangan penggunaan computer digital, peranan perangkat keras tersebut digantikan dengan “program” atau yang lebih dikenal sebagai perangkat lunak. Namun pada dasarnya penyelesaian dengan computer digital merupakan simulasi dari perangkat keras yang bersangkutan.

Filter yang berwujud perangkat keras pada dasarnya adalah suatu *sistem fisis*, yaitu *gabungan atau kombinasi*

unsur-unsur yang tersusun secara tertentu sehingga suatu input atau gangguan akan menyebabkan tanggapan (response) atau output yang karakteristik. Pada umumnya sistem fisis dapat dinyatakan dengan tanggapan impulsnya, sehingga suatu filter juga dapat dinyatakan dengan tanggapan impulsnya. Jadi yang dimaksud dengan filter dalam perangkat lunak adalah tanggapan impuls filter tersebut.

Seperti diketahui, bila pada suatu sistem fisis dengan tanggapan impuls $h(t)$, bekerja suatu input $x(t)$, maka akan ada output $y(t)$, yang harganya adalah:

$$y(t) = \int_0^t x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = \int_0^t h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

Ini adalah hubungan antara input-output suatu sistem dalam kawasan waktu. Persamaan (5.1) dikenal sebagai integral konvolusi (atau konvolusi) antara 2 fungsi waktu, yaitu $x(t)$ dan $h(t)$. Persamaan ini biasanya dituliskan dalam bentuk yang sederhana yaitu:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

dengan tanda $*$ adalah simbol untuk konvolusi.

Dalam kawasan frekuensi hubungan input-output suatu sistem menjadi lebih sederhana, yaitu;

$$Y(f) = X(f) \times H(f)$$

dengan $Y(f)$, $X(f)$, dan $H(f)$ adalah transformasi Fourier dari $y(t)$, $x(t)$, dan $h(t)$. $H(f)$ secara umum lebih dikenal sebagai fungsi pindah (transfer function) sistem yang bersangkutan. Jadi hubungan konvolusi dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian dalam kawasan frekuensi. Rumus transformasi Fourier dari kawasan waktu ke kawasan frekuensi adalah:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

dan rumus inversinya (dari kawasan frekuensi ke kawasan waktu) adalah:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Ada satu lagi rumus yang sering muncul dalam teori filter, yaitu integral korelasi

antara 2 fungsi yang berbeda (kroskorelasi) φ_{12} dan integral korelasi suatu fungsi dengan dirinya sendiri (otokorelasi) φ_{11} , yang perumusannya adalah:

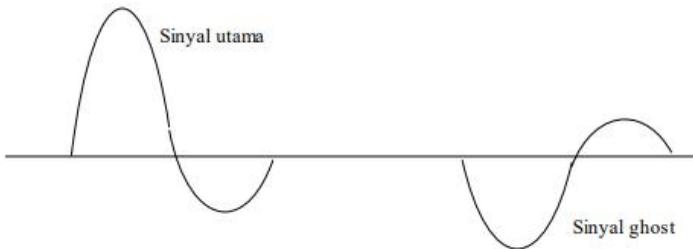
$$\varphi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t + \tau) dt$$

$$\text{dan } \varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t + \tau) dt$$

5. 2. Filter penghilang ghost

Ghost (hantu) atau gema adalah sinyal gangguan yang biasanya muncul pada survai seismic pantul dalam eksplorasi minyak di daratan (onshore). Pada survai seismic di daratan, sumber gelombang yang dipakai adalah dinamit yang diledakkan pada kedalaman tertentu. Oleh karena itu sinyal seismic utama yang menjalar ke bawah selalu diikuti oleh sinyal seismic yang dipantulkan oleh permukaan bumi. Sinyal pantul ini amplitudonya lebih kecil dari pada sinyal utama dengan factor R , yaitu koefisien refleksi pada bidang permukaan yang nilainya < 1 . Polaritas sinyal pantul ini akan terbalik terhadap polaritas sinyal utama karena bidang pemantulnya adalah permukaan bebas (gambar 5.1). Karena polaritasnya yang terbalik tersebut, sinyal pantul ini disebut sebagai ghost (dalam dunia televisi, yang dimaksud dengan ghost adalah bayangan di samping gambar utama yang

mengganggu dan sifatnya terbalik, misalnya rambut yang biasanya hitam akan kelihatan putih)



Gambar 5.1. Sinyal seismic yang diikuti oleh ghost

Sinyal utama yang diikuti oleh ghost yang menjalar ke bawah tersebut akan dipantulkan ke atas oleh bidang-bidang batas antar perlapisan batuan, kemudian direkam oleh deretan geofon yang ada di atas permukaan tanah. Setiap sinyal pantul akan menggambarkan profil bidang pemantul. Adanya sinyal ghost akan menyebabkan setiap bidang pemantul kelihatan double, sehingga gambaran struktur bawah permukaan yang diperoleh tidak sesuai dengan kenyataan. Ghost ini dapat dihilangkan dengan filter penghilang ghost (deghosting filter). Berikut ini akan

dijelaskan analisis perancangan filter penghilang ghost tersebut

Andaikan sinyal utama adalah $f(t)$, maka sinyal ghost adalah $-R f(t - \tau)$, dengan R adalah koefisien refleksi bidang permukaan (termasuk efek atenuasi) dan τ adalah selisih waktu kedatangan sinyal utama dengan ghost (2 kali waktu penjaran gelombang seismic dari sumber ke permukaan).

Gambar 5.2 menjelaskan bagaimana fungsi input yang masuk pada filter penghilang ghost dengan tanggapan impuls $h(t)$ dan bagaimana fungsi output yang diharapkan. Input yang masuk adalah sinyal utama yang diikuti oleh sinyal ghost, sehingga fungsi input tersebut adalah:

$$x(t) = f(t) - R f(t - \tau)$$

Sementara itu output yang diharapkan adalah sinyal yang bebas ghost, sehingga fungsi output tersebut adalah:

$$y(t) = f(t)$$

Untuk mendapatkan tanggapan impuls $h(t)$ filter yang bersangkutan dapat dilakukan analisis dlm kawasan frekuensi. Kalau transformasi Fourier sinyal utama adalah $F(f)$,

maka transformasi Fourier fungsi inputnya adalah:

$$X(f) = F(f) - RF(f)e^{-j2\pi f\tau} = (1 - Re^{-j2\pi f\tau})F(f)$$

dan transformasi Fourier fungsi outputnya adalah:

$$Y(f) = F(f)$$



Gambar 5.2. Input dan output filter penghilang ghost

Dalam kawasan frekuensi hubungan input output adalah:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

sehingga fungsi pindahnya adalah:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{F(f)}{(1 - Re^{-j2\pi f\tau}) F(f)} = \frac{1}{1 - Re^{-j2\pi f\tau}}$$

Dalam teori perderetan fungsi (deret pangkat) berlaku hubungan:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

sehingga persamaan (5.13) dapat dituliskan menjadi:

$$H(f) = \frac{1}{1 - R e^{-j2\pi f\tau}} = 1 + R e^{-j2\pi f\tau} + R^2 e^{-j2\pi f2\tau} + R^3 e^{-j2\pi f3\tau} + \dots$$

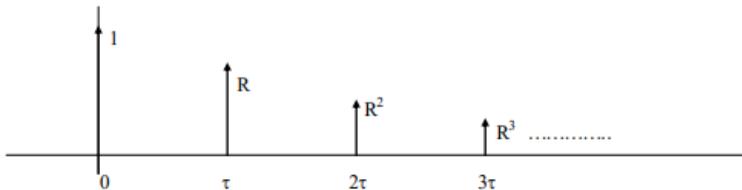
Tanggapan impuls filter penghilang ghost dapat diperoleh dengan melakukan transformasi Fourier invers terhadap persamaan (5.15), menjadi:

$$h(t) = \delta(t) + R\delta(t - \tau) + R^2\delta(t - 2\tau) + R^3\delta(t - 3\tau) + R^4\delta(t - 4\tau) + \dots$$

Persamaan (5.16) merupakan deretan impuls panjang ∞ yang masing-masing terpisah sepanjang waktu τ , dengan amplitude 1, R^2 , R^3 , R^4 , dan seterusnya ($R < 1$). Gambar 5.3 melukiskan tanggapan impuls filter penghilang ghost yang berupa deret impuls tersebut.

Untuk mengujinya tanggapan impuls ini dikonvolusikan dengan input yang terdiri dari sinyal asli yang diikuti oleh ghost (gambar 5.1). Caranya tanggapan impulsnya $h(t)$ dibalik dulu kemudian digeser kekanan. Pada saat sinyal utama bersinggungan dengan impuls yang pertama, maka akan dihasilkan sinyal utama itu sendiri. Pada saat sinyal utama bersinggungan dengan impuls kedua maka sinyal ghost akan bersinggungan dengan impuls pertama, sehingga

integral hasil kali input dengan tanggapan impuls filter akan sama dengan 0. Dan seterusnya bila sinyal utama bersinggungan dengan impuls ke i dan sinyal ghost bersinggungan dengan impuls yang ke $i - 1$, hasilnya akan selalu sama dengan 0. Jadi konvolusi antara input (sinyal utama diikuti ghost) dengan tanggapan impuls filter (deretan impuls panjang ∞) adalah sinyal utama yang bebas ghost.



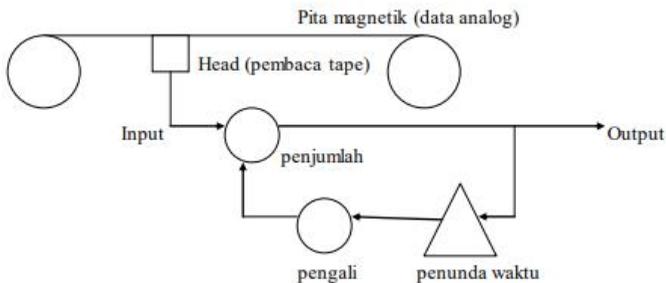
Gambar 5.3. Tanggapan impuls filter penghilang ghost

Harga τ yang berhubungan dengan filter tersebut diatas dapat dicari dengan menghitung otokorelasi sinyal input (seismogram yang mengandung sinyal-sinyal pantul yang diikuti oleh ghost). Otokorelasi ini akan maksimum bila pergeserannya sama dengan τ , sehingga harga τ dapat ditentukan.

Aplikasi filter penghilang ghost ini harus hati-hati, karena apabila filter ini dikenakan pada input yang tidak

mengandung ghost, filter ini justru akan memunculkan sinyal secara berulang-ulang dengan periode τ (walaupun amplitudonya mengecil). Dalam keadaan ini filter justru akan bernyanyi (singing).

Realisasi penggunaan filter penghilang ghost ini secara digital (computer) sangat sederhana karena filternya yang sudah berbentuk diskrit tersebut. Selebihnya tinggal menggunakan subroutine korelasi dan konvolusi. Walaupun sudah jarang digunakan filter penghilang ghost juga dapat dikerjakan secara analog, yaitu dengan menggunakan device penjumlah, penunda waktu (τ) dan pengali ($\times R$), seperti yang terlihat pada gambar 5.4.

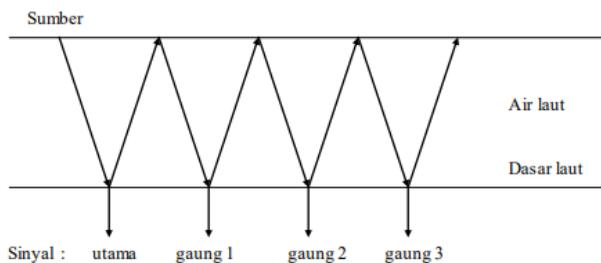


Gambar 5.4. Realisasi filter penghilang ghost secara analog

5.3. Filter penghilang reverberasi

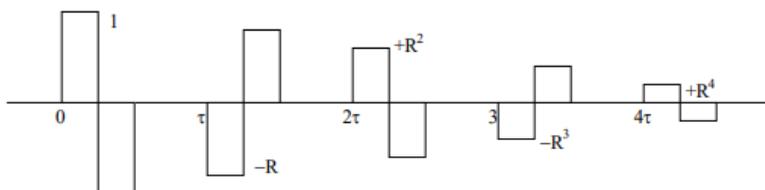
Reverberasi atau gaung adalah gangguan yang biasanya muncul pada survei seismik pantul yang dilakukan di atas

laut (offshore). Gangguan ini berupa sinyal pantul bolak-balik oleh dasar dan permukaan air laut. Sinyal ini cukup kuat karena atenuasi gelombang siesmik di dalam air adalah sangat kecil, dan keofisien refleksi permukaan air laut adalah sama dengan -1 (pantulan permukaan bebas). Jadi sinyal gangguan ini akan berupa sinyal pantul bolak-balik pertama, kedua, ketiga dan seterusnya. Polaritas sinyal pantul bolak-balik pertama adalah berlawanan dengan polaritas sinyal utama, polaritas sinyal pantul bolak-balik yang kedua sama dengan polaritas sinyal utama, dan seterusnya bergantian terbalik dan sama. Gambar 5.5 menjelaskan bagaimana reverberasi atau gaung terjadi pada lapisan air laut. Di sini terlihat bahwa gelombang yang menjaral ke bawah



Gambar 5.5. Reverberasi oleh lapisan air laut adalah sinyal utama yang diikuti oleh sinyal gaung 1, sinyal gaung 2, dan seterusnya. Dengan demikian sinyal yang

dipantulkan oleh sebuah bidang batas perlapisan batuan bawah laut akan berupa deretan sinyal-sinyal tersebut di atas, sehingga 1 bidang pantul dapat ditafsirkan sebagai banyak bidang pantul. Gambar 5.6 melukiskan sinyal seismik yang mengandung gaung.



Gambar 5.6. Sinyal seismik yang mengandung gaung

Untuk menghilangkan sinyal-sinyal gaung ini diperlukan suatu filter yang dikenal sebagai filter penghilang gaung (dereverberation filter). Perancangan filter ini dapat dimulai dengan hubungan antara input, tanggapan impuls filter, dan output. Input harus berupa sinyal utama yang diikuti oleh deretan sinyal gaung, sedangkan outputnya adalah sinyal utama yang sudah bebas dari gaung.

Andaikan sinyal utama adalah $f(t)$, maka sinyal seismic yang mengandung gaung adalah:

$$x(t) = f(t) - R f(t - \tau) + R^2 f(t - 2\tau) - R^3 f(t - 3\tau) + \dots$$

dan outputnya adalah:

$$y(t) = f(t)$$

Kalau tanggapan impuls filter tersebut adalah $h(t)$, maka akan berlaku relasi:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Dalam kawasan frekuensi relasi ini akan menjadi :

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

Kalau transformasi Fourier $f(t)$ adalah $F(f)$, maka transformasi Fourier $x(t)$ adalah:

$$X(f) = F(f) - R e^{-j2\pi f\tau} F(f) + R^2 e^{-j2\pi f2\tau} F(f) - R^3 e^{-j2\pi f3\tau} F(f) + \dots$$

dan transformasi Fourier output $y(t)$ adalah

$$Y(f) = F(f)$$

Dari persamaan (5.20), (5.21), dan (5.22) akan diperoleh fungsi filter (dalam kawasan frekuensi), yaitu:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 - R e^{-j2\pi f\tau} + R^2 e^{-j2\pi f2\tau} - R^3 e^{-j2\pi f3\tau} - \dots}$$

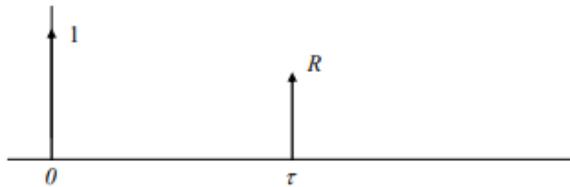
Dengan membagi langsung pembilang dgn penyebut pada persamaan (5.23), diperoleh:

$$H(f) = 1 + R e^{-j2\pi f\tau}$$

Transformasi Fourier balik dari $H(f)$ akan memberikan tanggapan impuls filter:

$$h(t) = \delta(t) + R \delta(t - \tau)$$

Jadi tanggapan impuls filter penghilang ghost adalah sangat sederhana, yaitu dua buah impuls dengan luas 1 dan R dan terpisah sejauh τ seperti yang terlihat pada gambar 5.7.

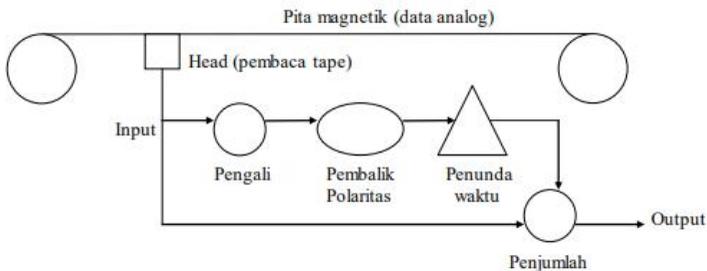


Gambar 5.7. Tanggapan impuls filter dereverberasi

Tanggapan impuls pada gambar 5.7 ini, kalau dikonvolusikan dengan input yang mengandung sinyal utama dan gaung pada gambar 5.6 akan menghilangkan semua sinyal gaung dan menampilkan sinyal utamanya.

Pengfilteran dereverberasi dengan computer sangat mudah dilaksanakan yaitu tinggal menggunakan subroutine konvolusi yang dioperasikan pada input (digital) dan tanggapan impuls filter dereverberasi. Untuk mencari harga τ tinggal panggil subroutine otokorelasi yang dioperasikan pada input, karena nilai otokorelasi akan maksimum jika pergeserannya sama dengan τ .

Pengfilteran secara analog juga dapat dilakukan dengan menggunakan device delay untuk menunda sinyal sepanjang τ , amplifier dengan gain R, inverter untuk membalik polaritas sinyal, dan penjumlah untuk menjumlahkan 2 sinyal atau lebih. Semua device ini dirangkai seperti pada gambar 5.8.



Gambar 5.8. Pengfilteran dereverberasi secara analog

5. 4. Filter frekuensi

Filter frekuensi ada banyak jenisnya, namun yang umum dan banyak dipakai adalah:

- Filter penerus frekuensi rendah (low pass filter), yaitu filter yang hanya meneruskan sinyal dengan frekuensi antara 0 sampai dengan f_H , dengan f_H adalah high cut off frequency dari pada filter. Di sini bandwidth atau lebar pita $B = f_H$

- Filter penerus frekuensi tinggi (high pass filter), yakni filter yang hanya meneruskan sinyal dengan frekuensi yang lebih besar dari pada f_L , yang biasa disebut low cut off frequency dari pada filter.
- Filter penerus pita frekuensi (band pass filter), adalah filter yang hanya meneruskan sinyal dengan frekuensi antara f_L dan f_H , yakni low cut off frequency dan high cut off frequency dari pada filter. Dalam hal ini lebar pita atau bandwidth adalah $B = f_H - f_L$
- Filter penolak frekuensi tertentu (notch filter) adalah filter yang menghilangkan sinyal dengan frekuensi tertentu, misalnya frekuensi PLN (50 Hz).

Analisis perancangan filter frekuensi mudah dilakukan dalam kawasan frekuensi, karena antara input $X(f)$, output $Y(f)$, dan fungsi pindah filter $H(f)$ berlaku hubungan:

$$Y(f) = H(f) \times X(f)$$

Persamaan (5.26) menunjukkan bahwa filter akan meneruskan sinyal berfrekuensi tertentu bila pada frekuensi itu nilai $H(f) = 1$, dan akan menolak sinyal berfrekuensi tertentu bila pada frekuensi itu nilai $H(f) = 0$.

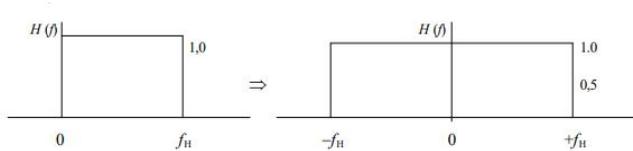
5. 4. 1. Filter penerus frekuensi rendah

Filter penerus frekuensi rendah (filter lolos rendah, low pass filter) meneruskan sinyal dengan frekuensi antara 0 sampai dengan frekuensi tertentu f_H , yang disebut sebagai high cut off frequency. Jadi secara fisis fungsi pindah filter lolos rendah dapat dilihat pada gambar 5.9 kiri. Namun secara matematis fungsi pindah tersebut harus seperti pada gambar 5.9 kanan, karena secara matematis dimungkinkan frekuensi bernilai negative. Tapi perlu diingat bahwa bila secara fisis nilai $H(f) = 1$, maka secara matematis (dengan frekuensi positif dan negative) nilainya juga = 1. Ini kelihatan aneh kenapa filter secara fisis mempunyai tinggi yang sama, tapi lebar yang berbeda. Ini dapat dijelaskan dengan menguraikan fungsi input berbentuk cosinus menjadi 2 fungsi cosinus yang mempunyai frekuensi positif dan negatif:

$$x(t) = A \cos (2 \pi f t) = 0.5 A \cos (2 \pi f t) + 0.5 A \cos (-2 \pi f t)$$

Dengan demikian perkalian filter fisis maupun matematis akan memberikan output yang sama, yaitu $y(t) = A \cos (2 \pi f t)$.

Perancangan filter frekuensi berdasar formula matematis (dengan program computer) tentu harus mengacu pada filter matematis. Jadi fungsi pindah filter lolos rendah merupakan fungsi kotak simetris setinggi 1 dan sepanjang $2 f_H$ (gambar 5.9, kanan).

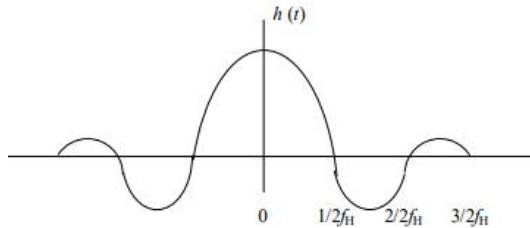


Gambar 5.9. Fungsi pindah filter lolos rendah dalam kawasan frekuensi secara fisis (kiri) dan secara matematis (kanan)

Tanggapan impuls filter (dalam kawasan waktu) dapat diperoleh dengan transformasi Fourier invers fungsi pindahnya. Bila fungsi pindahnya berupa fungsi kotak, maka tanggapan impulsnya adalah:

$$h(t) = 2f_H \frac{\sin 2\pi f_H t}{2\pi f_H t}$$

Fungsi pada persamaan (5.28) terkenal dengan nama sinus cardinal (sinc) yang bentuknya dapat dilihat pada gambar 5.10.



Gambar 5.10. Tanggapan impuls filter lolos rendah yang berbentuk sinus kardinal

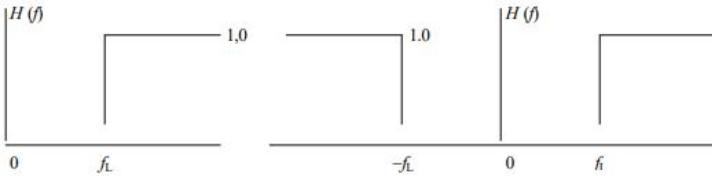
Pengfilteran frekuensi lolos rendah dengan computer digital dapat dilaksanakan dengan jalan mendigitalkan tanggapan impulsnya (persamaan 28), kemudian mengkonvolusikannya dengan sinyal input (digital) yang ingin difilter.

5. 4. 2. Filter penerus frekuensi tinggi

Filter penerus frekuensi tinggi (high pass filter) atau filter lolos tinggi adalah filter yang hanya meneruskan sinyal yang frekuensinya lebih besar dari frekuensi tertentu f_L , yaitu low cut off frekuensinya. Dengan demikian, secara fisis fungsi pindah filter lolos tinggi $H(f)$ akan = 0 untuk $f < f_L$ dan akan = 1 untuk $f > f_L$. Gambar 5.11 adalah fungsi pindah filter lolos tinggi secara fisis dan secara matematis.

Sekarang masalahnya adalah bagaimana mendapatkan tanggapan impuls filter lolos tinggi tersebut dari fungsi pindahnya. Aplikasi rumus transformasi Fourier

akan sulit karena batas integrasinya adalah $\pm \infty$. Namun dengan menggunakan sedikit trik tanggapan impuls yang dimaksud dapat dicari dengan mudah.



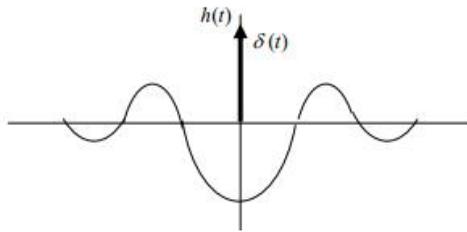
Gambar 5.11. Fungsi pindah filter lolos tinggi secara fisis (kiri) dan matematis (kanan)

Gambar 5.12 menjelaskan bagaimana trik tersebut dilakukan. Fungsi yang berbentuk parit dapat diganti fungsi konstan dikurangi dengan fungsi kotak.

Gambar 5.12. Fungsi parit = fungsi konstan – fungsi kotak
 Transformasi fungsi constant adalah fungsi delta, sedang transformasi Fourier fungsi kotak adalah sinus cardinal. Jadi tanggapan impuls filter lolos tinggi adalah fungsi delta dikurangi fungsi sinus cardinal, yang secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$h(t) = \delta(t) - 2f_L \frac{\sin 2\pi f_L t}{2\pi f_L t}$$

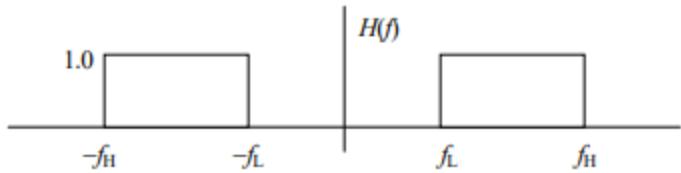
yang bentuknya dapat dilihat pada gambar 5.13.



Gambar 5. 13. Tanggapan impuls filter lolos tinggi

5. 4. 3. Filter penerus pita frekuensi

Filter penerus pita frekuensi (band pass filter) atau filter lolos pita adalah filter yang hanya meneruskan sinyal-sinyal yang frekuensinya berkisar antara f_L (low cut off frequency) dan f_H (high cut off frequency). Fungsi pindah filter ini secara fisis akan = 1 untuk frekuensi antara f_L dan f_H , dan = 0 untuk frekuensi diluar itu. Secara matematis fungsi pindah ini akan = 1 untuk frekuensi antara $-f_L$ dan $-f_H$ dan antara f_L dan f_H , dan = 0 untuk frekuensi di luar kedua range frekuensi tersebut. Fungsi pindah filter lolos pita ini dapat dilihat pada gambar 5.14



Gambar 5.14. Fungsi pindah filter lolos pita

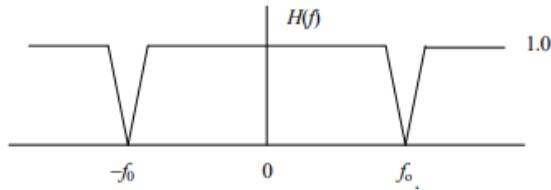
Tanggapan impuls filter lolos pita dapat diturunkan dari fungsi pindahnya, yaitu transformasi Fourier baliknya. Banyak cara untuk mengerjakannya, yaitu: i) dikerjakan langsung menggunakan perumusan matematikanya, ii) menggunakan rumus pergeseran (fungsi kotak yang digeser ke kiri dan ke kanan), iii) menggunakan teori modulasi amplitudo, dan iv) menguraikan fungsi pindah menjadi: fungsi kotak dengan lebar $2 f_H$ dikurangi dengan fungsi kotak dengan lebar $2 f_L$. Cara terakhir adalah yang paling mudah, dan hasil transformasinya (tanggapan impulsnya) adalah:

$$h(t) = 2f_H \frac{\sin 2\pi f_H t}{2\pi f_H t} - 2f_L \frac{\sin 2\pi f_L t}{2\pi f_L t}$$

5. 4. 4. Filter penolak frekuensi tertentu

Filter penolak frekuensi tertentu (notch filter) kadang-kadang diperlukan misalnya untuk menghilangkan gangguan berfrekuensi 50 Hz yang berasal dari jaringan PLN. Dalam kawasan frekuensi, fungsi pindah filter ini harus berharga 1

kecuali pada frekuensi tertentu (misal 50 Hz) yang berharga 0. Secara matematik fungsi pindah notch filter bernilai 1 untuk semua frekuensi (positif dan negatif) kecuali pada frekuensi $\pm f_0$ yang harganya sama dengan 0. Fungsi pindah filter ini dapat dilihat pada gambar 5.15.



Gambar 5.15 Filter penolak frekuensi tertentu.

Secara matematis fungsi pindah filter ini dapat dituliskan sebagai:

$$H(f) = 1.0 - \delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)$$

dan transformasi Fourier baliknya akan menghasilkan tanggapan impuls filter penolak frekuensi tertentu, yaitu:

$$h(t) = 1.0 - 2 \cos(2\pi f_0 t)$$

BAB 6 TRANSFORMASI Z

6.1. Pengertian transformasi z

Transformasi z merupakan bentuk lain dari transformasi

Laplace maupun Fourier. Kalau transformasi Laplace dan Fourier dapat dikenakan baik pada fungsi-fungsi diskrit maupun analog, maka transformasi z hanya dapat dikenakan pada fungsi diskrit. Suatu deret runtun waktu adalah contoh fungsi diskrit yang sangat sesuai untuk dianalisis dengan menggunakan transformasi z.

Andaikan ada deret runtun waktu f_k sebanyak / sepanjang N sampel / data

$$f_k = (f_0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_N)$$

maka transformasi z dari f_k adalah:

$$F(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + \dots + f_N z^N$$

atau:

$$F(z) = \sum_{k=0}^N f_k z^k$$

Persamaan (6.3) ini merupakan persamaan polinomial dalam z dengan koefisien-koefisien f_k . Secara matematis fungsi

digital tidak harus dimulai dengan digit yang ke 0, tapi dapat dari $-\infty$, sehingga secara lebih umum transformasi z fungsi digital f_i adalah:

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^N f_k z^k$$

Suatu deret runtun waktu akan terdefinisi dengan baik kalau waktu cupliknya Δt diketahui. Akan tetapi dalam transformasi z waktu cuplik ini tidak terlihat. Ini tidak menjadi masalah kalau kawasan z hanya dipakai untuk penyelesaian masalah beserta analisisnya, yang hasilnya ditransformasi balik ke kawasan waktu. Waktu cuplik akan muncul pula pada transformasi dari kawasan z ke kawasan frekuensi.

Catatan: Banyak buku menggunakan z^{-k} untuk transformasi z nya.

6. 2. Transformasi z dan konvolusi

Andaikan ada 2 deret runtun waktu f_k dan g_k , yang bentuknya adalah:

$$f_k = (1, 2, 1)$$

dan $g_k = (1, 2, 2, 1)$

maka transformasi z dari f_k dan g_k adalah:

$$F(z) = 1 + 2z + 1z^2$$

dan

$$G(z) = 1 + 2z + 2z^2 + 1z^3$$

Sementara itu konvolusi antara f_k dan g_k adalah:

$$f_k * g_k = (1, 4, 7, 7, 4, 1)$$

dan perkalian antara $F(z)$ dan $G(z)$ adalah:

$$\begin{aligned} F(z)G(z) &= (1 + 2z + z^2)(1 + 2z + 2z^2 + z^3) \\ &= 1 + 4z + 7z^2 + 7z^3 + 4z^4 + z^5 \end{aligned}$$

Kalau diperhatikan, persamaan (6.10) adalah persamaan polinomial dalam z (deret pangkat), yang koefisien-koefisiannya sama dengan nilai-nilai hasil konvolusi antara f_k dan g_k . Jadi kesimpulannya adalah: ‘Konvolusi dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian dalam kawasan z ’. Hal ini mirip dengan kenyataan: ‘Konvolusi dalam kawasan waktu akan menjadi perkalian dalam kawasan s (transformasi Laplace) dan kawasan frekuensi (transformasi Fourier).

Kita mengetahui bahwa hubungan antara output $y(t)$, input $x(t)$, dan tanggapan impuls $h(t)$ suatu sistem fisis adalah:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

sehingga hubungan ini dalam kawasan z adalah:

$$Y(z) = X(z) H(z)$$

Hubungan antara output, input, dan tanggapan impuls sistem dalam kawasan z yang melalui operasi perkalian yang sederhana ini dapat digunakan untuk analisis perancangan filter-filter digital, mengingat filter-filter tersebut merupakan perwujudan (manifestasi) dari sistem-sistem fisis. Dalam perancangan filter, yang terpenting adalah bagaimana mendapatkan tanggapan impuls $h(t)$ filter yang bersangkutan. Kalau input dan output diketahui maka tanggapan impuls filter dalam kawasan z , menurut persamaan (6.12) adalah:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Sekarang masalahnya adalah bagaimana mendapatkan $H(z)$ yang berbentuk persamaan polinomial dalam z (deret pangkat dalam z) dari hasil bagi antara $Y(z)$ dan $X(z)$ tersebut, sehingga dapat diperoleh tanggapan impuls dalam kawasan waktu $h(t)$ atau h_k . Dengan kata lain bagaimana melakukan transformasi z terbalik (inverse z -transform).

6. 3. Transformasi z balik

Transformasi z balik (inverse) umumnya berhubungan dengan fungsi rasional dalam z, seperti yang terlihat pada persamaan (6.13). Transformasi z balik suatu fungsi yang berbentuk deret pangkat dari z adalah koefisien-koefisien deret pangkat tersebut.

Jadi inti transformasi z balik adalah merubah fungsi rasional dalam z menjadi fungsi yang berbentuk deret pangkat dalam z. Ada beberapa cara mengerjakan transformasi z balik ini, yaitu:

a. Metode perderetan

Apabila $F(z)$ berupa fungsi rasional maka perderetan dapat dilakukan membagi langsung pembilang dengan penyebut. Dalam pembagian langsung ini dimungkinkan menghasilkan fungsi deret pangkat yang nilainya naik dan yang nilainya turun. Untuk lebih jelasnya kita menderetkan suatu fungsi rasional yang sederhana yaitu:

$$F(z) = \frac{1}{1-2z}$$

Kalau dilakukan pembagian langsung maka akan dapat diperoleh 2 fungsi deret pangkat (keduanya adalah betul), yaitu:

$$F(z) = 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + 16z^4 + \dots$$

$$\text{Dan } F(z) = -\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-4} - \dots$$

Kalau $F(z)$ adalah sebuah filter, maka penyelesaian yang kita pilih adalah fungsi deret pangkat yang koefisien-koefisiennya konvergen, agar filter yang bersangkutan stabil. Jadi penyelesaian yang harus kita pilih adalah yang kedua, yaitu persamaan (6.16).

Dalam perderetan ini dimungkinkan mendapatkan fungsi deret pangkat dengan z berpangkat positif, negatif, atau campuran. Yang penting koefisien-koefisiennya harus konvergen.

b. Metoda pengembangan menjadi fungsi-fungsi rasional sederhana.

Metoda ini banyak dipakai dalam menyelesaikan masalah integral untuk fungsi rasional yang sukar. Suatu fungsi rasional terdiri dari nominator N (bagian atas atau pembilang) dan denominator D (bagian bawah atau

penyebut). Akar-akar fungsi deret pangkat pada nominator akan merupakan titik-titik “zero” yang menyebabkan fungsi rasional ybs berharga 0, sedang akar-akar fungsi denominator akan merupakan “pole” (kutub) yang menyebabkan fungsi rasional yang bersangkutan berharga ∞ .

Prosedur untuk mengembangkan fungsi pecahan ini adalah:

1. Buat z pangkat tertinggi pada N satu tingkat lebih kecil dibandingkan dengan pangkat tertinggi pada D , dengan cara membagi langsung N/D .

Contoh:

$$F(z) = \frac{z^3}{z^2 - 2z - 3}$$

$$\begin{array}{r}
 z^2 - 2z - 3 \) \ z^3 \qquad \qquad (z + 2 \\
 \underline{z^3 - 2z^2 - 3z} \\
 2z^2 + 3z \\
 \underline{2z^2 - 4z - 6} \\
 7z + 6
 \end{array}$$

Pembagian ini menghasilkan $(z + 2)$ dan masih kelebihan $(7z + 6)$, sehingga persamaan (6.16) dapat dituliskan menjadi:

$$F(z) = (z + 2) + \frac{7z + 6}{z^2 - 2z - 3}$$

Transformasi z balik untuk suku pertama ruas kanan adalah $(2, 1)$, dan transformasi z balik suku kedua yang harus dikerjakan pada prosedur berikutnya.

2. Mencari akar-akar (titik-titik kutubnya) dari denominator D .

Suku kedua pada ruas kanan persamaan (6.18) adalah:

$$G(z) = \frac{7z + 6}{z^2 - 2z - 3} = \frac{7z + 6}{(z + 1)(z - 3)}$$

Persamaan (6.19) menunjukkan bahwa $G(z)$ mempunyai kutub kutub di $z = -1$ dan $z = 3$. Persamaan (6.19) akan dapat dikembangkan menjadi jumlahan fungsi-fungsi rasional yang lebih sederhana, yaitu:

$$G(z) = \frac{7z + 6}{(z + 1)(z - 3)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z - 3}$$

Nilai-nilai A dan B dapat ditentukan dengan memasukkan nilai-nilai z tertentu kedalam persamaan

(6.20), yang mudah adalah nilai z pada kutub-kutubnya.

Untuk itu persamaan (6.20) dapat diubah menjadi:

$$7z + 6 = A(z - 3) + B(z + 1)$$

Kemudian ruas kiri dan kanan persamaan (6.21) dievaluasi pada kutub-kutubnya:

$$\text{Untuk } z = 3 \Rightarrow 21 + 6 = B(3 + 1) \Rightarrow B = 27/4$$

$$\text{Untuk } z = -1 \Rightarrow -7 + 6 = A(-1 - 3) \Rightarrow A = 1/4$$

Jadi hasil pengembangan dari persamaan (6.20) adalah :

$$G(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{(z + 1)} + \frac{27}{4} \frac{1}{(z - 3)}$$

Transformasi z balik dari $G(z)$ kemudian dapat diperoleh dengan mudah, yaitu dengan menderetkan fungsi-fungsi rasionalnya.

Bentuk pengembangan persamaan (6.20) sangat bergantung dari nilai-nilai akar denominatornya, yang setiap akarnya dapat berbeda, kembar 2, dan bahkan kembar 3. Sebagai contoh, fungsi rasional:

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{(z - a)(z - b)^2(z - c)^3}$$

denominatornya mempunyai 1 akar tunggal a , 2 akar kembar b , dan 3 akar kembar c . Bentuk pengembangan persamaan (6.23) adalah:

$$F(z) = \frac{A}{(z-a)} + \frac{B_1}{(z-b)} + \frac{B_2 z}{(z-b)^2} + \frac{C_1}{(z-c)} + \frac{C_2 z}{(z-c)^2} + \frac{C_3 z(z+c)}{(z-c)^3}$$

c. Penyelesaian analitis dari rumus transformasi z balik.

Rumus transformasi z balik dalam bentuk persamaan integral dari $F(z)$ adalah:

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F(z)}{z^{k+1}}$$

Persamaan (6.25) ini harus diselesaikan dalam 2 bagian, yaitu untuk $k \leq 0$ dan $k > 0$. Penyelesaiannya menggunakan variabel kompleks dengan teori residunya.

6. 4. Transformasi Laplace dan perancangan filter

6. 4. 1. Transformasi Laplace

Transformasi Laplace dari suatu fungsi waktu $f(t)$ didefinisikan sebagai:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt ,$$

dengan s adalah variabel frekuensi kompleks, yang bentuknya adalah:

$$s = \sigma + j\omega$$

sehingga bidang s merupakan bidang kompleks dengan sumbu horizontal σ dan sumbu vertikal $j\omega$. Sementara itu, transformasi Laplace balik dari $F(s)$ adalah:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds$$

Seperti halnya transformasi z , maka transformasi Laplace balik juga dapat dilakukan dengan jalan pengembangan menjadi fungsi-fungsi rasional tertentu, yang transformasi Laplace baliknya sudah diketahui (tabel), seperti fungsi-fungsi impuls, undak, ramp, sin, cos, exp, dan sebagainya.

Cara yang lain adalah menyelesaikan persamaan (6.28) dengan menggunakan variabel kompleks dan teori residunya yang cukup sulit (tidak dibahas di sini).

6. 4. 2. Perancangan Filter dan Fungsi Pindah

Teori filter telah berkembang sejak lama, yang analisisnya pada bidang s atau dalam kawasan frekuensi kompleks. Dalam kawasan ini suatu filter dapat dinyatakan dgn Fungsi Pindah (Transfer Function) nya, yang biasanya disimbulkan dengan $H(s)$.

Secara fisis $H(s)$ adalah transformasi Laplace dari tanggapan impuls (impuls response) filter yang bersangkutan $h(t)$.

Hubungan antara input dan output suatu filter dalam kawasan frekuensi kompleks ini sangat sederhana, yaitu:

$$Y(s) = X(s) H(s)$$

dengan $Y(s)$ adalah transformasi Laplace dari output $y(t)$, dan $X(s)$ adalah transformasi Laplace dari input $x(t)$. Dengan demikian, fungsi pindah filter dapat ditentukan dari:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Dengan demikian fungsi pindah $H(s)$ umumnya berupa fungsi pecahan (rasional) pada kawasan s , seperti yang terlihat pada persamaan (6.30). Fungsi rasional terdiri dari pembilang (nominator, N) dan penyebut (denominator, D). Akar-akar N akan berkaitan dengan *zero* yang menyebabkan $H(s)$ bernilai 0, dan akar-akar D akan berkaitan dengan *pole* atau kutub yang menyebabkan $H(s)$ bernilai tak berhingga. Posisi titik-titik pole dan zero pada bidang s akan sangat berperan pada fungsi pindah filter yang bersangkutan.

Dalam merancang suatu filter, yang terpenting adalah mengetahui posisi titik-titik pole dan zero filter yang bersangkutan pada kawasan frekuensi kompleks atau pada bidang s . Sumbu vertical (sumbu kompleks) pada bidang s mempunyai arti yang sangat penting. Sumbu tersebut merupakan sumbu frekuensi, sehingga tanggapan frekuensi (amplitudo dan fase) akan dievaluasi pada titik-titik di sepanjang sumbu tersebut. Sumbu kompleks ini juga akan membatasi posisi pole yang menghasilkan filter yang stabil dan yang tidak stabil. Pole yang terletak di sebelah kiri sumbu kompleks akan menghasilkan filter yang stabil, sedang di sebelah kanan sumbu kompleks akan menghasilkan filter yang tidak stabil. Titik-titik zero akan selalu berhubungan dengan stabilitas, sehingga posisinya pada bidang s dapat di sebarang tempat, tanpa menimbulkan ketidakstabilan.

6. 4. 3. Tanggapan amplitudo dan tanggapan fase

Tanggapan amplitudo dan fase suatu filter dapat ditentukan (secara grafis) bila posisi titik-titik pole dan zero fungsi pindah filter yang bersangkutan diketahui. Gambar 6.1 menunjukkan posisi titik pole dan zero tersebut dalam

bidang s . Untuk filter yang stabil, posisi pole harus di sebelah kiri sumbu imajiner, sedang posisi zero dapat di sebarang tempat. Andaikan fungsi pindah filter yang bersangkutan adalah:

$$H(s) = \frac{A_0 (s - z_0)(s - z_1)}{(s - p_0)(s - p_1)(s - p_2)},$$

maka $H(j\omega)$ dapat dituliskan sebagai:

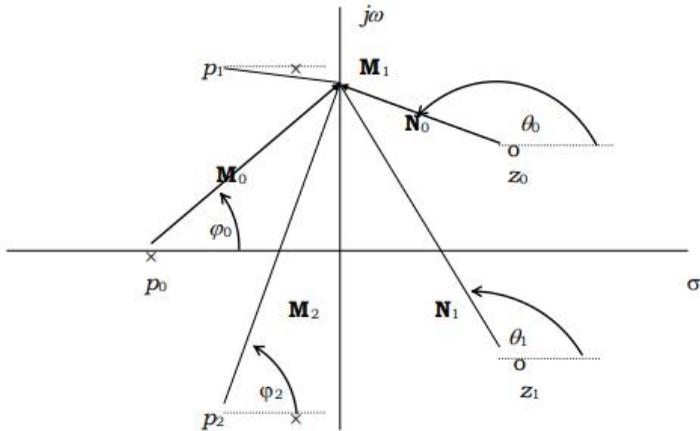
$$H(j\omega) = \frac{A_0 (j\omega - z_0)(j\omega - z_1)}{(j\omega - p_0)(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)}$$

Masing-masing faktor $j\omega - z_i$ atau $j\omega - p_i$ berhubungan dengan vektor dari titik zero atau pole ke sebarang titik $j\omega$ pada sumbu imajiner. Vektor-vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk polar:

$$j\omega - z_i = \mathbf{N}_i e^{j\varphi_i} \quad \text{dan} \quad j\omega - p_i = \mathbf{M}_i e^{j\theta_i}$$

sehingga $H(j\omega)$ pada persamaan (6.32) dapat ditulis menjadi:

$$H(j\omega) = \frac{A_0 \mathbf{N}_0 \mathbf{N}_1}{\mathbf{M}_0 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} e^{j(\varphi_0 + \varphi_1 - \theta_0 - \theta_1 - \theta_2)}$$



Gambar 6.1. Analisis pole-zero pada perancangan filter.

Secara umum, berdasar gambar 6.1 dan persamaan (6.34), tanggapan amplitudo dapat dituliskan sebagai:

$$M(\omega) = \frac{\prod |N_i|}{\prod |M_k|} = \frac{\text{Perkalian panjang vektor dari zero ke sumbu } j\omega}{\text{Perkalian panjang vektor dari pole ke sumbu } j\omega}$$

dan tanggapan fasenya adalah:

$$\phi(\omega) = \sum \theta_i - \sum \varphi_i = \text{Jumlahan sudut vektor dari zero ke sumbu } j\omega \\ - \text{jumlahan sudut vektor dari pole ke sumbu } j\omega$$

Yang perlu diperhatikan dalam perancangan filter ini adalah:

- a. Posisi pole di sepanjang sumbu imajiner dan di daerah sebelah kanannya akan menghasilkan filter yang tidak stabil.
- b. Posisi pole dekat dengan sumbu imajiner (sebelah kirinya) akan memberikan efek tuning pada frekuensi tertentu
- c. Posisi zero dekat dengan sumbu imajiner akan memberikan efek penekanan (meredam) pada frekuensi tertentu.

6. 4. 4. Transformasi Laplace vs transformasi z

Transformasi z dan transformasi Laplace mempunyai hubungan yang spesifik. Transformasi z suatu fungsi digital $f(k)$ adalah $F(z) = \sum f(k) z^k$. Sedang transformasi Laplace suatu fungsi $f(t)$ adalah $F(s) = \int f(t) e^{-st} dt$. Jadi antara transformasi z dan transformasi Laplace ada hubungan transformasi:

$$z = e^{-s}$$

dengan bidang z dan s adalah bidang kompleks.

Transformasi dari s ke z (atau sebaliknya) akan menghasilkan hal-hal sebagai berikut:

- a. Sumbu imajiner pada bidang s akan ditransformasikan menjadi lingkaran kesatuan C_1 (lingkaran dengan jejari 1 atau $|z| = 1$) pada bidang z .
- b. Bagian kanan bidang s ($\text{Re}(s) > 0$) akan ditransformasikan menjadi bidang di dalam lingkaran kesatuan C_1 pada bidang z .
- c. Bagian kiri bidang s ($\text{Re}(s) < 0$) ditransformasikan menjadi bidang di luar lingkaran kesatuan C_1 pada bidang z .

Karena teori filter (terutama filter frekuensi) sudah berkembang dalam bidang s , maka dengan menggunakan transformasi (6.37) di atas kita dapat merancang filter dalam bidang z (filter digital) berdasar filter-filter yang telah ada pada kawasan s . Sifat filter ditentukan oleh posisi pole dan zero pada fungsi pindahnya di kawasan s . Demikian juga filter di kawasan z , akan ditentukan oleh posisi pole dan zernya. Filter di kawasan s akan stabil bila posisi pole nya

ada disebelah kiri sumbu imaginernya, yang dalam kawasan z harus berada di luar lingkaran kesatuan C_1 .

6. 5. Perancangan filter dengan metode grafis dalam kawasan z

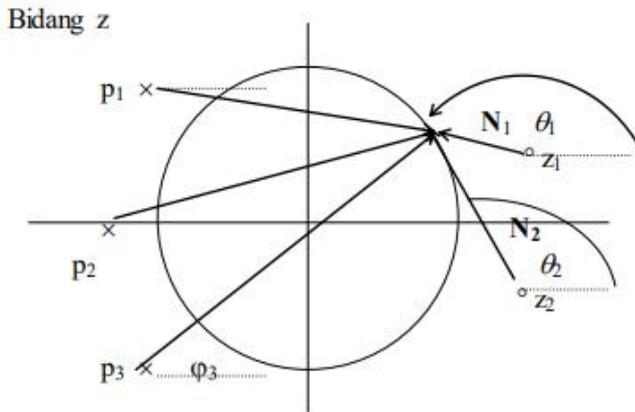
6. 5.1. Metode grafis dalam kawasan z .

Seperti halnya perancangan filter pada kawasan s maka tanggapan amplitudo dan tanggapan fase pada kawasan z juga dapat ditentukan secara grafis berdasarkan letak titik-titik pole dan zeronya. Kalau pada kawasan s kedua response tersebut dievaluasi di sepanjang sumbu imaginernya (sumbu fekuensi), maka pada kawasan z kedua respons dievaluasi di sepanjang lingkaran kesatuan C_1 (gambar 6.2). Pada lingkaran kesatuan ini frekuensinya terbagi secara linier dari 0 sampai frekuensi Nyquistnya F_N , yang besarnya:

$$F_N = \frac{1}{2 \delta t}$$

dengan δt adalah waktu cuplik fungsi digital yang bersangkutan. Jadi titik $z = 1 + j 0$ akan sesuai dengan frekuensi 0 dan titik $z = -1 + j 0$ akan sesuai dengan

frekuensi F_N . Ini sesuai dengan konsep transformasi Fourier digital yang syaratnya antara lain fungsi harus band limited (mempunyai frkuensi terbatas, yang dalam hal ini adalah F_N).



Gambar 6.2. Analisis pole-zero pada filter kawasan z

Berdasar gambar 6.2, maka tanggapan amplitudo filter yang bersangkutan adalah

$$M(f) = \frac{\prod N_k}{\prod M_l} = \frac{\text{Perkalian panjang vektor dari zero ke } C_1}{\text{Perkalian panjang vektor dari pole ke } C_1}$$

dan tanggapan fasenya adalah:

$$\phi(f) = \sum \theta_k - \sum \varphi_l = \text{Jumlahan sudut vektor dari zero ke } C_1 \\ - \text{Jumlahan sudut vektor dari pole ke } C_1$$

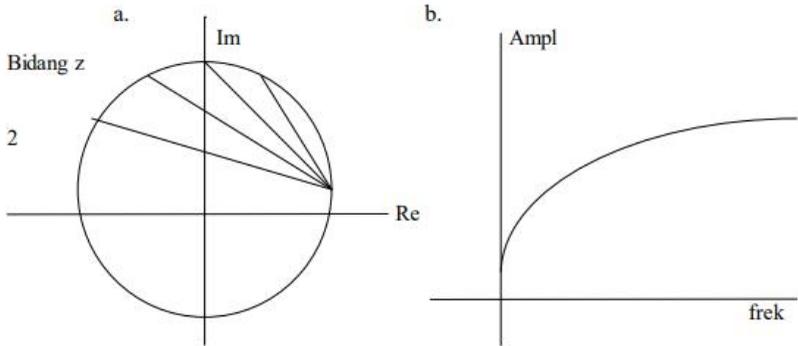
Jadi filter-filter yang sudah dikembangkan dalam kawasan s akan dengan mudah ditransformasikan ke kawasan z . Filter-filter tersebut antara lain adalah filter-filter frekuensi (lowpass, highpass, bandpass, notch, tuned) yang banyak dikembangkan oleh Butterworth, Chebyshev, dan sebagainya.

6. 5. 2. Filter penghilang komponen arus searah

Untuk menghilangkan komponen arus searah (DC) atau komponen dengan frekuensi 0, maka harus ada zero pada lingkaran kesatuan C_1 , yang berhubungan dengan frekuensi 0, yaitu di titik $z = 1 + j 0$ (gambar 6. 3a).

Jadi filter penghilang arus searah pada dasarnya akan berbentuk $F(z) = 1 - z$. Tanggapan amplitudo adalah panjang vektor dari zero ke lingkaran kesatuan C_1 , yang nilainya mulai 0 kemudian membesar secara perlahan dengan bertambahnya frekuensi, dan nilainya akan sama

dengan 2 (maksimum) bila frekuensinya sama dengan F_N (gambar 6.3 b).



Gambar 6. 3. a. Posisi zero pada bidang z untuk filte penghilang arus searah, dan b. tanggapan amplitudo filter yan bersangkutan

Kalau diperhatikan tanggapan amplitudonya, maka filter akan benar-benar menghilangkan komponen berfrekuensi 0. Akan tetapi juga mempunyai efek negatif yang tidak diinginkan, yaitu adanya pengurangan amplitudo yang cukup signifikan terutama di daerah frekuensi rendah.

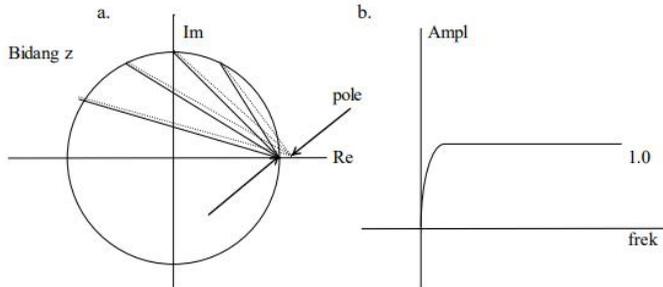
Untuk mengurangi efek pengurangan amplitudo yang range (jangkau) frekuensi- nya cukup lebar ini kita dapat menambahkan sebuah pole di dekat titik zero yang ada, di

luar lingkaran kesatuan C_1 (berhubungan dengan stabilitas filter). Andaikan titik pole tersebut adalah titik $z = 1.01 + j0$, maka bentuk filter menjadi:

$$F(z) = \frac{1-z}{1.01-z} = \frac{0.9901(1-z)}{1-0.9901z}$$

Tanggapan amplitudo filter ini akan jauh lebih baik dari pada tanggapan amplitudo filter tanpa titik pole. Karena posisi zero dan pole yang sangat dekat maka bila frekuensinya bergeser sedikit saja dari 0, tanggapan amplitudonya akan mendatar mendekati 1 (panjang vektor dari zero ke C_1 hampir sama dengan panjang vektor dari pole ke C_1).

Posisi pole dan zero pada filter penghilang arus searah (yang hampir ideal) dan tanggapan amplitudonya dapat dilihat pada gambar 6.4. Tanggapan amplitudo filter penghilang arus searah ini hampir datar (flat) untuk semua frekuensi.



Gambar 6.4. a. Posisi zero dan pole pada bidang z untuk filter penghilang arus searah, dan b. tanggapan amplitudo filter yang bersangkutan

6. 5. 2. Notch filter

Notch filter adalah filter untuk menghilangkan komponen frekuensi tertentu yang tidak dikehendaki kemunculannya (noise). Sebagai contoh adalah frekuensi sinyal yang dipancarkan oleh jaringan listrik (PLN), yang besarnya adalah 50 Hz.

Andaikan kita ingin menekan gangguan (noise) dengan frekuensi 50 Hz, yang masuk dalam suatu system pengukuran yang outputnya berupa sinyal digital dengan waktu sampling 1 millisekon (frekuensi sampling 1000 Hz). Titik-titik pada lingkaran kesatuan C_1 dalam bidang z yang

berhubungan dengan frekuensi 50 Hz adalah titik-titik yang membuat sudut:

$$\Omega = \frac{50}{F_N} \times 180^\circ = \frac{50}{500} \times 180^\circ = 18^\circ$$

Pole atau zero yang kompleks akan selalu berpasangan dengan konjugatnya, sehingga titik yang berhubungan dengan frekuensi 50 Hz ada sepasang yaitu yang membentuk sudut $\Omega = \pm 18^\circ$ pada lingkaran kesatuan C_1 . Kalau dihitung koordinat titik-titik tersebut adalah:

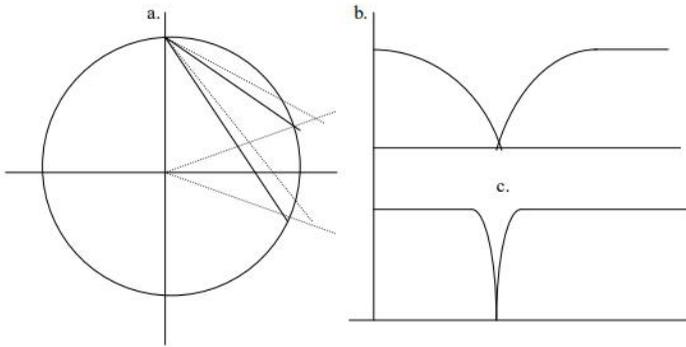
$$z = 0.9510 + j 0.3090$$

dan
$$z = 0.9010 - j 0.3090$$

Karena filter harus berespon 0 pada frekuensi tersebut, maka filter harus mempunyai zero pada titik-titik tersebut di atas. Untuk memperbaiki respon frekuensi (amplitudo) nya, maka filter harus mempunyai pole-pole yang sangat dekat dengan kedua zero tersebut yang terletak di luar lingkaran kesatuan C_1 (lihat gambar 6.5). Misalkan letak titik-titik pole tersebut adalah:

$$z = 0.9605 + j 0.3121$$

dan
$$z = 0.9605 - j 0.3121$$



Gambar 6.5. a. Titik-titik pole dan zero pada Notch filter, b. Respon notch filter tanpa pole, dan c. Respon notch filter dengan pole dan zero yang berdekatan.

Berdasar posisi titik-titik pole dan zero tersebut, bentuk notch filter dalam kawasan z dapat dituliskan sebagai:

$$F(z) = \frac{(0.9510 + j 0.3090 - z)(0.9510 - j 0.3090 - z)}{(0.9605 + j 0.3121 - z)(0.9605 - j 0.3121 - z)}$$

atau

$$F(z) = \frac{0.3090^2 + (0.9510 - z)^2}{0.3121^2 + (0.9605 - z)^2} = \frac{0.9999 - 1.9020 z + z^2}{1.0199 - 1.9210 z + z^2}$$

atau

$$F(z) = \frac{0.9804 (1 - 1.9022 z + 1.0001 z^2)}{1 - 1.8835 z + 0.9805 z^2}$$

6.6 Filter rekursi

Filter-filter frekuensi dalam kawasan z , yang umumnya merupakan fungsi rasional dalam z dapat diselesaikan komputer digital dengan menggunakan algoritma rekursi.

Dengan algoritma rekursi ini perhitungan akan dapat diselesaikan lebih cepat dari pada perhitungan dengan algoritma konvolusi, karena dalam algoritma rekursi, output pada suatu saat ditentukan dari output-output pada saat sebelumnya, tidak seperti pada algoritma konvolusi, yang setiap outputnya harus selalu diulang dari input awalnya.

Algoritma rekursi atau filter rekursi dapat dijelaskan sebagai berikut. Andaikan kita mempunyai suatu filter yang berbentuk fungsi rasional dalam z :

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z + b_2 z^2}$$

Maka untuk setiap input $X(z)$ akan memberikan output:

$$Y(z) = F(z) X(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z + b_2 z^2} X(z)$$

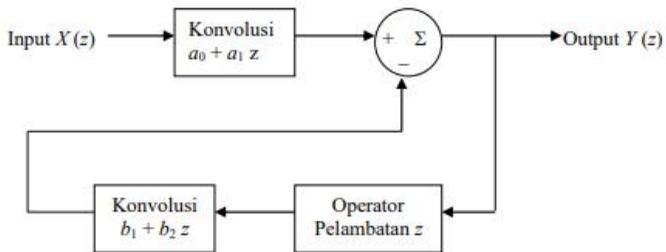
Persamaan (6.49) dapat dituliskan menjadi:

$$Y(z) + (b_1 + b_2 z) zY(z) = (a_0 + a_1 z) X(z)$$

atau:

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z) X(z) - (b_1 + b_2 z) z Y(z)$$

Persamaan (6.51) dapat diterjemahkan dalam kalimat: Output akan sama dengan input dikonvolusikan dengan deret diskrit (a_0, a_1) dikurangi dengan konvolusi antara output yang diperlambat 1 interval waktu dengan deret diskrit (b_1, b_2) . Diagram alir algoritma rekursi dapat dilihat pada gambar 6



Gambar 6. Diagram alir algoritma rekursi

Algoritma rekursi ini dapat direalisasikan dengan menggunakan komputer dengan suatu persamaan yang sederhana, yaitu:

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} - (b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2})$$

Persamaan rekursi untuk filter-filter rasional kemudian dapat dituliskan menjadi bentuk yang lebih umum, yaitu:

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{j=1}^M b_j y_{n-j}$$

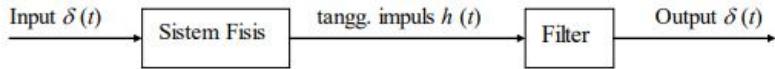
Perlu selalu diingat bahwa dalam menggunakan algoritma rekursi ini nilai b_0 harus sama dengan 1. Nilai b_0 akan selalu dapat dibuat sama dengan satu dengan membagi nominator dan denominator filter rasional yang bersangkutan dengan b_0 (sudah tentu kalau b_0 tidak = 0)

6.7 Filter invers (dekonvolusi)

Apabila pada suatu sistem fisis dikenakan input $x(t)$, maka outputnya $y(t)$ adalah konvolusi antara input tersebut dengan tanggapan impuls (impulse response) sistem ybs $h(t)$. Dengan kata lain outputnya adalah konvolusi antara input dengan sistem.

Untuk keperluan tertentu kadang-kadang diperlukan filter yang mengembalikan output sistem fisis tersebut menjadi inputnya semula. Gambar 7 menjelaskan filter yang

dimaksud, apabila inputnya adalah sebuah impuls (untuk mudahnya)



Gambar 7. Filter yang mengembalikan output menjadi input suatu sistem

Filter tersebut, karena mengembalikan output menjadi input dinamakan filter invers. Dan karena filter tersebut menghilangkan efek konvolusi oleh sistem disebut filter dekonvolusi.

Filter invers dalam kawasan z adalah sangat sederhana. Berdasar gambar 7 maka input yang bekerja pada filter adalah $H(z)$, dan outputnya adalah $Y(z) = 1$ (impuls), sehingga tanggapan filternya adalah:

$$F(z) = \frac{1}{H(z)}$$

yang sesuai dengan namanya yaitu filter invers atau filter dekonvolusi.

Contoh penggunaan filter invers ini banyak dijumpai di dalam eksplorasi seismik dalam mencari minyak bumi. Seperti diketahui bahwa suatu jejak seismik (seismogram) dalam metode seismik pantul merupakan konvolusi antara sebuah wavelet dengan deretan koefisien refleksi bidang-bidang batas antar batuan di bawah permukaan bumi. Yang dimaksud dengan wavelet di sini adalah gelombang kecil yang merupakan tanggapan (respons) bumi terhadap input yang berupa impuls, misalnya ledakan dinamit. Apabila wavelet ini cukup panjang dan jarak antar koefisien refleksi cukup dekat, maka hasil konvolusinya akan berupa deretan banyak wavelet yang menumpuk (overlap) satu sama lain. Ini akan mengakibatkan koefisien refleksi yang berdekatan sukar dilihat. Dengan menggunakan filter invers maka outputnya akan berupa spike-spike (berupa impuls) deretan koefisien refleksi yang terpisah dengan jelas. Jadi filter invers berguna untuk meningkatkan daya pisah pada kasus eksplorasi seismik pantul (refleksi).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Krishnamurthi, Karthik, et al. "Sensor based automatic control of railway gates." *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology (IJARCET)* 4.2 (2015): 539-543.
- [2] Al-Zuhairi, Mahdi AS. "Automatic Railway Gate and Crossing Control based Sensors & Microcontroller." *International Journal of Computer Trends and Technology (IJCTT)* 4.7 (2013).
- [3] Mahmud, Saifuddin, Ishtiaq Reza Emon, and Md Mohaimin Billah. "Automated railway gate controlling system." *International Journal of Computer Trends and Technology (IJCTT)* 27.1 (2015).
- [4] Min, Se Dong, et al. "Noncontact respiration rate measurement system using an ultrasonic proximity sensor." *IEEE sensors journal* 10.11 (2010): 1732-1739.
- [5] Waghmare, Akash, et al. "Automatic Railway Gate Controlling and Smart System of Railway Gate Crossing using IoT." *Recent Trends in Information Technology and its Application* 3.1 (2020).
- [6] M. M. Eid and M. I. Fath Allah, "Automated Railway Security System," 2019 6th International Conference on Advanced Control Circuits and Systems (ACCS) & 2019 5th International Conference on New Paradigms in Electronics & information Technology (PEIT), Hurgada, Egypt, 2019, pp. 54-64, doi: 10.1109/ACCS-PEIT48329.2019.9062886.
ARDUINO
- [7] Potdar, Apurva S., et al. "Wireless sensor network for real time monitoring and controlling of railway accidents." 2017

- International Conference on Trends in Electronics and Informatics (ICEI). IEEE, 2017. IR SENSOR
- [8] Supraptono, Eko, et al. "Automatic Railway Barriers Security System Design using Inductive Proximity Sensor based on Atmega 328."
- [9] Banuchandar, J., et al. "Automated unmanned railway level crossing system." *International Journal of Modern Engineering Research (IJMER)* 2.1 (2012): 458-463.
- [10] Pwint, Hnin Ngwe Yee, Zaw Myo Tun, and Hla Myo Tun. "Automatic Railway Gate Control System Using Microcontroller." *International Journal of Science, Engineering and Technology Research (IJSETR)* 3.5 (2014): 1547-1551.
- [11] Ramkumar, M. Siva. "Unmanned Automated Railway Level Crossing System Using Zigbee." *International Journal of Electronics Engineering Research* 9.9 (2017): 1361-1371.
- [12] Suharjono, Amin, Eni Dwi Wardihani, and Yossy Febryana Kusuma Hardani. "Analysis of the vibration signal detection for rail train arrival." *2017 IEEE International Conference on Communication, Networks and Satellite (Comnetsat)*. IEEE, 2017.
- [13] Sakthivel, K., and R. Sathyapriya. "Design Of Automatic Railway Gateoperator." *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 119.12 (2018): 5441-5448.
- [14] Mittal, S. K., et al. "Micro-controller based oscillation monitoring system for the safety of railway vehicles with high storage capacity and real time warning facility." (2004).
- [15] Indonesia, Pemerintah Republik. "Peraturan Pemerintah nomor 34 tahun 2006 tentang jalan." Jakarta (ID): Sekretariat Negara (2006).

- [16] Perhubungan, Menteri. "Perpotongan dan/atau Persinggungan Antara Jalan Kereta Api dan Bangunan Lain (Keputusan Menteri No. 53 Tahun 2000)." (2000).
- [17] Indonesia, Pemerintah Republik. "Peraturan Menteri Perhubungan No. 60 Tahun 2012 Tentang Persyaratan Teknis Jalur Kereta Api." Jakarta (ID): Sekretariat Negara (2012).
- [18] Perhubungan, Menteri. "Persyaratan Teknis Jalur Kereta Api." Peraturan Menteri Perhubungan PM 60 (2012).
- [19] Dewangan, Atul Kumar, Meenu Gupta, and Pratibha Patel. "Automation of Railway Gate Control Using Microcontroller." *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, ISSN (2012): 2278-0181.
- [20] Raju, Burra, and B. Sreenivas. "Alarm system of railway gate crossing based on GPS and GSM." *International Journal of Scientific Engineering and Research* 1.1 (2013).
- [21] Chellaswamy, C., Srinidhi Srinivasan, and R. Ramesh Babu. "A humanitarian intelligent level crossing controller utilizing GPS and GSM." 2014 IEEE Global Humanitarian Technology Conference-South Asia Satellite (GHTC-SAS). IEEE, 2014.
- [22] B. Jiang, Z. Wang, L. Jiang and S. Wang, "Railway vibration monitoring system based on ARM and acceleration," 2014 9th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, Hangzhou, 2014, pp. 998-1004, doi: 10.1109/ICIEA.2014.6931309.
- [23] Josselin, V., P. Touboul, and R. Kielbasa. "Capacitive detection scheme for space accelerometers applications." *Sensors and Actuators A: Physical* 78.2-3 (1999): 92-98.
- [24] Islam, M. M., A. Halder, and F. Ahmed. "Enhancing security by Automatic Railway Gate Control using Microcontroller

- and IR Sensor." Proceedings of 10th Global Engineering, Science and Technology Conference. 2015.
- [25] Jiang, Bo, et al. "Railway vibration monitoring system based on ARM and acceleration." 2014 9th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. IEEE, 2014.
- [26] Angrisani, L., et al. "Automatic detection of train arrival through an accelerometer." 2010 IEEE Instrumentation & Measurement Technology Conference Proceedings. IEEE, 2010.
- [27] Feng, Hao, et al. "Automatic fastener classification and defect detection in vision-based railway inspection systems." IEEE transactions on instrumentation and measurement 63.4 (2013): 877-888.
- [28] Dong, Hairong, et al. "Automatic train control system development and simulation for high-speed railways." IEEE circuits and systems magazine 10.2 (2010): 6-18.
- [29] Li, Ying, et al. "Rail component detection, optimization, and assessment for automatic rail track inspection." IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems 15.2 (2013): 760-770.
- [30] Biswas, Subrata, et al. "Pressure sensed fast response anti-collision system for automated railway gate control." American Journal of Engineering Research 2.11 (2013): 163-173.
- [31] Yilmazlar, Eray, et al. "Design Of Stepper Motor Control Interface With Embedded Systems." (2018).
- [32] Haidar, Ahmed M., Chellali Benachaiba, and Mohamad Zahir. "Software interfacing of servo motor with microcontroller." (2013): 84.
- [33] Xia, Yiqi, Fengying Xie, and Zhiguo Jiang. "Broken railway fastener detection based on adaboost algorithm." 2010

- International Conference on Optoelectronics and Image Processing. Vol. 1. IEEE, 2010.
- [34] Berlin, Eugen, and Kristof Van Laerhoven. "Trainspotting: Combining fast features to enable detection on resource-constrained sensing devices." 2012 Ninth International Conference on Networked Sensing (INSS). IEEE, 2012.
- [35] Berlin, Eugen, and Kristof Van Laerhoven. "Sensor networks for railway monitoring: Detecting trains from their distributed vibration footprints." 2013 IEEE International Conference on Distributed Computing in Sensor Systems. IEEE, 2013.
- [36] Chetty, Kevin, Qingchao Chen, and Karl Woodbridge. "Train monitoring using GSM-R based passive radar." 2016 IEEE Radar Conference (RadarConf). IEEE, 2016.

TENTANG PENULIS

Erna Kusuma Wati lahir di Sukoharjo 22 Januari 1989. Merupakan Alumni SMA Negeri 1 Klaten yang menyelesaikan Studi Pendidikan Fisika dari Fakultas MIPA Universitas Negeri Yogyakarta (2010), Master of Science ilmu Fisika dari Universitas Gadjah Mada Yogyakarta (2013). Saat ini merupakan dosen aktif di program studi Teknik Fisika Universitas Nasional, Jakarta.

ISBN 978-623-7376-56-9



9

786237

376569